Вычислительная геометрия на плоскости

Е.В. Андреева, Ю.Е. Егоров,
Москва

“Вычислительная геометрия — это раздел информатики, изучающий алгоритмы решения геометрических задач. Такие задачи возникают в компьютерной графике, проектировании интегральных схем, технических устройств и др. Исходными данными в такого рода задачах могут быть множество точек, набор отрезков, многоугольник и т.п. Результатом может быть либо ответ на какой-то вопрос (типа “пересекаются ли эти прямые”), либо какой-то геометрический объект (например, наименьший выпуклый многоугольник, содержащий заданные точки)” [1].

В “Информатике” № 14 за этот год была опубликована статья одного из авторов, посвященная задачам вычислительной геометрии в олимпиадах по информатике. В частности, там был сформулирован ряд элементарных подзадач, на которые опирается решение большинства задач вычислительной геометрии. Однако занятия даже с математически хорошо подготовленными учащимися старших классов показали, что решение таких подзадач вызывает у них большое затруднение. Задача либо ставит их в тупик, либо выбранный “лобовой” способ решения настолько сложен, что довести его до конца без ошибок учащиеся не могут. Анализ результатов решения “геометрических” задач на всероссийских олимпиадах по информатике приводит к тем же выводам. Такую ситуацию мы считаем поправимой. Цель настоящей статьи — показать подходы к решению геометрических задач на плоскости, которые позволяют достаточно быстро и максимально просто получать решения большинства элементарных подзадач.

Векторы и координаты

Чтобы применять методы вычислительной геометрии, необходимо геометрические образы перевести на язык чисел. Будем считать, что на плоскости задана декартова система координат (СК). Общепринято выбирать координатные оси так, чтобы поворот на угол $\frac{\pi}{2}$, при котором ось Ox совмещается с осью Oy, происходил против часовой стрелки. Такую СК называют *правой*. В дальнейшем подразумевается, что наша СК правая. В такой СК направление поворота против часовой стрелки называется положительным.

Теперь геометрические объекты получают аналитическое выражение. Так, чтобы задать отрезок, достаточно указать координаты его концов. Прямую можно задать, указав пару ее точек, либо координатами одной ее точки и вектором, характеризующим направление этой прямой, и т.д. Вообще при решении задач основным инструментом для нас будут векторы. Напомним поэтому некоторые сведения о них.

Отрезок AB, у которого точку A считают началом (точкой приложения), а точку B — концом, называют *вектором* AB и обозначают либо $\overrightarrow{AB}$, либо жирной строчной латинской буквой, например, $\boldsymbol{a}$. Для обозначения длины вектора (то есть длины соответствующего отрезка) будем пользоваться символом модуля (например, $|\boldsymbol{a}|$). Два вектора называются равными, если они совмещаются параллельным переносом.

Пусть точки A и B имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ называется пара чисел $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Наоборот, если вектор имеет координаты (x, y) и приложен к точке (x_1, y_1), то легко вычислить координаты (x_2, y_2) его конца: $x_2 = x_1 + x$, $y_2 = y_1 + y$. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ по теореме Пифагора равна $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Равенство двух векторов $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ и $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$ эквивалентно равенству их соответствующих координат: $a_x = b_x$, $a_y = b_y$.

Векторы можно складывать и умножать на числа. Сложение векторов производится по правилу треугольника или по правилу параллелограмма (*рис.* 1).

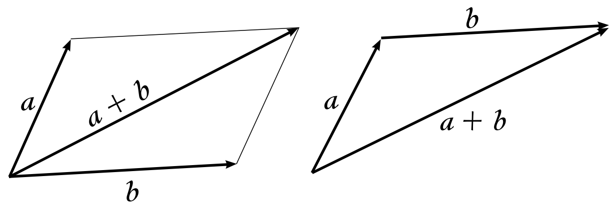

Рис. 1

Под разностью векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ понимают сумму вектора $\boldsymbol{a}$ с вектором, противоположным вектору $\boldsymbol{b}$ (т.е. противоположно направленным и совпадающим с ним по длине). При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на число t получается вектор, имеющий длину $|t| \cdot |\boldsymbol{a}|$; его направление совпадает с направлением $\boldsymbol{a}$, если $t > 0$, и противоположно ему, если $t < 0$. Это позволяет нам ввести отношение коллинеарных векторов (т.е. сонаправленных или противоположно направленных), понимая под ним коэффициент их пропорциональности. С помощью такого отношения удобно описывать порядок расположения точек на прямой. Например, условие $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} < 0$ означает, что точки A, B и C лежат на одной прямой, причем точка A лежит между B и C. Отметим еще, что вектор, сонаправленный с данным вектором $\boldsymbol{a}$ и имеющий заданную длину l, можно выразить следующим образом: $\frac{l}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$. В дальнейшем мы неоднократно будем этим пользоваться. В координатах перечисленные операции над векторами записываются так:

если $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ и $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$,

то $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$,

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$ и $t \cdot \boldsymbol{a} = (t \cdot a_x, t \cdot a_y)$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$ называется число

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos \varphi,$$

где φ — угол между этими векторами.

В координатах оно вычисляется так:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Как видно из формул, скалярное произведение можно использовать для нахождения угла между векторами. В частности, два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю ($\cos\frac{\pi}{2} = 0$). Так как $\cos \varphi$ положителен для острых углов и отрицателен для тупых, угол между векторами острый (тупой) в том и только том случае, когда их скалярное произведение положительно (отрицательно).

Угол между векторами

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два ненулевых вектора, отложенные от одной точки. В школьном курсе геометрии под углом между векторами понимается меньший из двух углов между лучами, на которых лежат векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Значение такого угла всегда находится в промежутке $[0; \pi]$.

Для вычислений часто более удобным оказывается понятие ориентированного угла, т.е. угла, учитывающего взаимное расположение векторов. Значение ориентированного угла по абсолютной величине равно обычному углу между векторами. Ориентированный угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ положительный, если поворот от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ совершается в положительном направлении (в нашей СК против часовой стрелки), и отрицательный — в другом случае. Говорят также, что пара векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ положительно (отрицательно) ориентирована. Таким образом, величина ориентированного угла зависит от порядка перечисления векторов и может принимать значения в интервале $(-\pi; \pi]$. На *рис.* 2 ориентированные углы между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ равны по модулю, но первый из них отрицательный, а второй — положительный.

Для любых векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ легко вычислить величину ориентированного угла AOB, зная величины углов AOC и COB: она равна их сумме с учетом знаков. Например, при таком расположении векторов, как на *рис.* 2, угол AOC войдет в сумму со знаком плюс, а угол COB — с минусом. Может случиться, что при суммировании двух положительных (двух отрицательных) углов результат превзойдет π по модулю. Тогда, чтобы получить правильное значение угла, нужно отнять (добавить) 2π. Замечательно, что при этом нам не придется рассматривать различные случаи взаимного расположения векторов. В этом и состоит преимущество использования ориентированных углов.

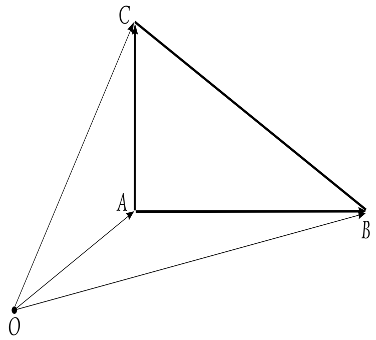

Рис. 2

Как, зная координаты векторов, найти угол между ними? Очевидный способ следует из формулы для скалярного произведения: $\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$. Однако при этом получится значение неориентированного угла и часть информации (возможно, полезная) будет нами потеряна. Кроме того, использование этой формулы для программирования не всегда удобно. Например, в языке Паскаль, как и в ряде других языков программирования, из обратных тригонометрических функций реализована только функция $\operatorname{arctg} \varphi$. Мы покажем, как найти угол иначе, после того, как познакомимся с ориентированной площадью.

Ориентированная площадь

Ориентированная площадь треугольника — это его обычная площадь, снабженная знаком. Знак у ориентированной площади треугольника ABC такой же, как у ориентированного угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. То есть ее знак зависит от порядка перечисления вершин. На *рис.* 2 треугольник ABC — прямоугольный. Его ориентированная площадь равна $\frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}{2}$ (она больше нуля, так как пара $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ориентирована положительно). Эту же величину можно вычислить другим способом. Пусть O — произвольная точка плоскости. На нашем рисунке площадь треугольника ABC получится, если из площади треугольника OBC вычесть площади OAB и OCA. Таким образом, нужно просто *сложить ориентированные площади* треугольников OAB, OBC и OCA. Это правило работает при любом выборе точки O.

Точно так же для вычисления площади любого многоугольника $A_1A_2...A_n$ нужно сложить ориентированные площади треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1 (*рис.* 3). В сумме получится площадь многоугольника, взятая со знаком плюс, если при обходе ломаной $A_1A_2...A_n$ внутренность многоугольника находится слева, и со знаком минус, если она находится справа. Она и называется “ориентированной площадью многоугольника $A_1A_2...A_n$”. Таким образом, для правой СК ориентированная площадь окажется положительной при обходе границы многоугольника против часовой стрелки.

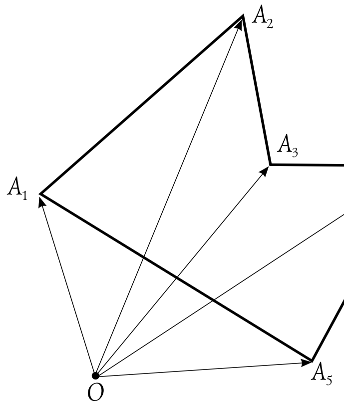

Рис. 3

Итак, вычисление площади многоугольника свелось к нахождению ориентированной площади треугольника. Посмотрим, как выразить ее в координатах. Пусть S — ориентированная площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$. Вычислим ее для конкретного расположения векторов (*рис.* 4). Величина S здесь положительна (пара векторов $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ положительно ориентирована). Достроим наш треугольник до параллелограмма $OACB$ площади $2S$ (здесь $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$). Тогда площадь прямоугольника OC_1CC_2 равна

$$\begin{aligned}|OC_1| \cdot |OC_2| &= (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = \\ &= 2S + 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 = \\ &= 2S + x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_1\end{aligned}$$

(здесь S_1, S_2, S_3 — обычные неориентированные площади). Раскрыв скобки в левой части равенства и выразив $2S$, получим

$$2S = x_1y_2 - x_2y_1. \qquad (1)$$

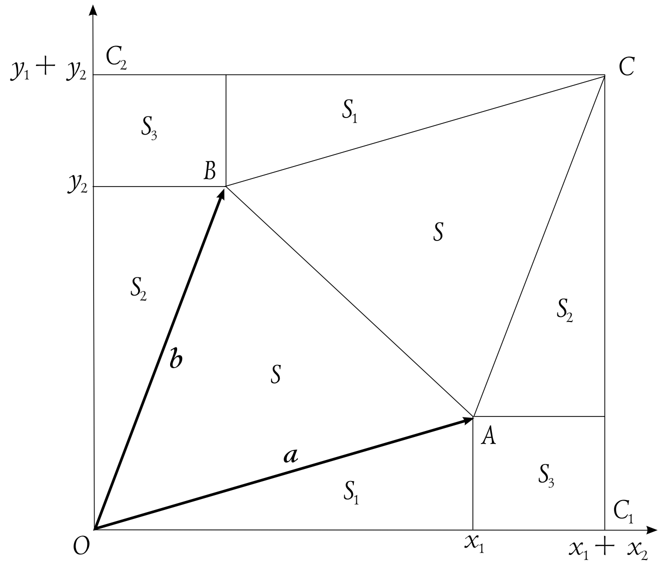

Рис. 4

Нетрудно убедиться, что и при других вариантах расположения векторов формула (1) также остается справедливой. Таким образом, ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$, равна $x_1y_2 - x_2y_1$.

Величина $x_1y_2 - x_2y_1$ называется *косым* (или *псевдоскалярным*) *произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Для косого произведения мы будем употреблять обозначение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Его название связано со свойством косой симметрии: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ (в литературе это обозначение используется для векторного произведения, но в отличие от последнего косое произведение — скаляр). Так как неориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot |\sin \varphi|$, а знак $\sin \varphi$ совпадает со знаком ориентированного угла φ, то $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin \varphi$. Величина $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ больше нуля, если пара векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ положительно ориентирована, и меньше нуля в противном случае. Косое произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они коллинеарны ($\sin 0 = \sin \pi = 0$).

Теперь, как и обещали, найдем в координатах угол между двумя векторами. Пусть φ — ориентированный угол между векторами $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$. Сопоставляя формулы для скалярного и косого произведений этих векторов, имеем $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{[a,b]}{(a,b)} = \dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1x_2 + y_1y_2}$. Зная тангенс угла между векторами, мы легко найдем угол между прямыми, на которых лежат $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: он равен $\left|\operatorname{arctg}\dfrac{[a,b]}{(a,b)}\right|$. Чтобы получить непосредственно сам угол между векторами, осталось выяснить, острый он или тупой. Это мы определим по знаку скалярного произведения. Учтем еще, что знак ориентированного угла совпадает со знаком косого произведения. Тогда окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{\pi}{2}, \text{ если } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0,\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] > 0;\\
\varphi &= -\frac{\pi}{2}, \text{ если } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0,\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] < 0;\\
\varphi &= \operatorname{arctg}\frac{[a,b]}{(a,b)}, \text{ если } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > 0; \qquad (2)\\
\varphi &= \operatorname{arctg}\frac{[a,b]}{(a,b)} + \pi, \text{ если } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 0,\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \geq 0;\\
\varphi &= \operatorname{arctg}\frac{[a,b]}{(a,b)} - \pi, \text{ если } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 0,\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] < 0.
\end{aligned}$$

Величина обычного угла равна модулю значения ориентированного угла.

Отметим, что все сказанное об ориентированных углах и площадях относилось к правой СК. Может статься, что для конкретной задачи удобнее ввести левую СК. К примеру, координаты пикселей на экране монитора даются именно в левой СК (ось абсцисс смотрит вправо, ось ординат — вниз). При таком выборе осей положительным является поворот *по* часовой стрелке. С этой поправкой все вышеизложенное применимо и к левой СК.

Уравнения линий

1.1. Уравнение прямой, проходящей через две различные точки, заданные своими координатами.

Пусть на прямой заданы две несовпадающие точки: P_1 с координатами (x_1, y_1) и P_2 с координатами (x_2, y_2). Соответственно вектор с началом в точке P_1 и концом в точке P_2 имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Если $P(x, y)$ — произвольная точка на нашей прямой, то координаты вектора $\overrightarrow{P_1P}$ равны $(x - x_1, y - y_1)$. С помощью косого произведения условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{P_1P_2}$ можно выразить так: $[\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}] = 0$, т.е. $(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$ (3)

или

$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_1(y_1 - y_2) + y_1(x_2 - x_1) = 0$

Последнее уравнение перепишем следующим образом:

$$ax + by + c = 0, \qquad (4)$$

где $a = y_2 - y_1$,
$b = x_1 - x_2$,
$c = x_1(y_1 - y_2) + y_1(x_2 - x_1)$.

Итак, всякую прямую можно задать уравнением вида (4). В следующем пункте мы покажем, что и наоборот, при любых значениях коэффициентов (кроме $a = b = 0$) уравнение такого вида задает на плоскости некоторую прямую.

Заметим, что при программировании первую из формул (3) нельзя использовать в форме отношения $\frac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y - y_1}$, так как, во-первых, даже если все координаты заданных точек целые, ошибки вещественной арифметики при операции деления не позволят проверять с помощью указанного соотношения принадлежность той или иной точки данной прямой, а, во-вторых, если точка P совпадет с P_1, программа будет прервана в силу деления на ноль.

Уравнение прямой можно записывать и в параметрическом виде. Любой вектор, приложенный к точке P_1 и заканчивающийся в произвольной точке $P(x, y)$, лежащей на нашей же прямой, можно получить из $\overrightarrow{P_1P_2}$ путем умножения на некоторое вещественное число t. Тогда для каждой из координат в отдельности справедливо:

$$(x - x_1) = t(x_2 - x_1) \text{ и } (y - y_1) = t(y_2 - y_1).$$

Выразив отсюда x и y, получаем систему параметрических уравнений, которой удовлетворяет каждая точка нашей прямой:

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1),$$
$$y = y_1 + t(y_2 - y_1). \qquad (5)$$

Наоборот, если координаты (x, y) точки P удовлетворяют этим соотношениям, вектор $\overrightarrow{P_1P}$ коллинеарен $\overrightarrow{P_1P_2}$ и, значит, точка P лежит на прямой P_1P_2. Таким образом, система уравнений (5), где параметр t пробегает всю действительную ось, задает прямую P_1P_2.

Эта же система, но со введенными ограничениями на значения t, будет задавать и отрезок P_1P_2, и луч P_1P_2. Для отрезка $t \in [0, 1]$ (то есть x меняется в диапазоне $[x_1, x_2]$, а y — в диапазоне $[y_1, y_2]$), а для луча — $t \in [0, \infty)$.

1.2. Уравнение прямой, заданной одной из ее точек и вектором нормали к ней.

Пусть заданная точка P_0 прямой имеет координаты (x_0, y_0), а некоторый вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к ней (то есть вектор, ортогональный нашей прямой) — координаты (a, b). Если $P(x, y)$ — произвольная точка на нашей прямой, то координаты вектора $\overrightarrow{P_0P}$ равны $(x - x_0, y - y_0)$. Тогда скалярное произведение ортогональных векторов $(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{P_0P})$ можно выразить так:

$$(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{P_0P}) = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (6)$$

Очевидно, что уравнение прямой (6) также несложно привести к виду (4). Тогда становится понятно, что коэффициенты a и b из уравнения (4) представляют собой координаты одного из векторов нормали к описываемой данным уравнением прямой. Отсюда следует, что при любых значениях коэффициентов a, b и c (кроме $a = b = 0$) уравнение (4) задает прямую. Ею будет прямая, перпендикулярная вектору (a, b) и проходящая через точку, чьи координаты удовлетворяют (4). При $a \neq 0$ такой точкой будет, например, точка $(-\frac{c}{a}, 0)$, при $a = 0$ — точка $(0, -\frac{c}{b})$.

Несмотря на то что постановка задачи на первый взгляд кажется несколько искусственной, именно с ее помощью мы получили удобный инструмент для рассмотрения целого ряда других задач. В чем сейчас нам и предстоит убедиться.

1.3. Уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через заданную точку.

Пусть заданная точка P_0 искомой прямой имеет координаты (x_0, y_0). Если $P(x, y)$ — произвольная точка на той же прямой, то координаты вектора $\overrightarrow{P_0P}$ равны $(x - x_0, y - y_0)$. Этот вектор перпендикулярен вектору $\overrightarrow{P_1P_2}$, где $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ — точки на данной прямой. Тогда скалярное произведение ортогональных векторов $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_0P})$ можно выразить так:

$(x_2 - x_1)(x - x_0) + (y_2 - y_1)(y - y_0) = 0$ (7)

или

$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 = 0.$

Если же исходная прямая задана коэффициентами a, b и c своего уравнения, то легко заметить, что вектор ее нормали с координатами (a, b) коллинеарен вектору $\overrightarrow{P_0P}$.

Тогда, записывая косое произведение этих векторов, получим

$$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0. \tag{8}$$

1.4. Уравнение прямой, параллельной данной и находящейся от нее на заданном расстоянии r.

Очевидно, что искомых прямых две. Вектор нормали к исходной прямой ортогонален и каждой из параллельных прямых. Значит, коэффициенты a и b при x и y в уравнении (4) для параллельных прямых можно взять такими же, как и у исходной прямой. Остается подобрать значение для третьего из коэффициентов. Обозначим его для одной прямой c_1, для второй — c_2. Как уже было показано выше, для определения этих коэффициентов достаточно знать хотя бы по одной точке на каждой прямой.

Возьмем произвольную точку $P(x_0, y_0)$ на исходной прямой (если прямая была задана не двумя точками, то точку можно найти по рецепту, предложенному в конце 1.2). Проведем через нее прямую, перпендикулярную данной. На параллельной же прямой будем искать точку $M(x_1, y_1)$ ее пересечения с этим перпендикуляром (*рис.* 5). Нам известен один вектор нормали $\boldsymbol{n}=(a, b)$. Вектор $\overrightarrow{PM}$ коллинеарен ему, а его длина равна r. Для определенности будем считать, что, как и на рисунке, нормаль лежит по ту же сторону от прямой, что и точка M. Тогда $\overrightarrow{PM}=\boldsymbol{n}\cdot\dfrac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Значит, координаты точки M равны $x_0+a\cdot\dfrac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y_0+b\cdot\dfrac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Подставляя их в уравнение (6), получаем $c_1=-ax_0-by_0-r\sqrt{a^2+b^2}$.

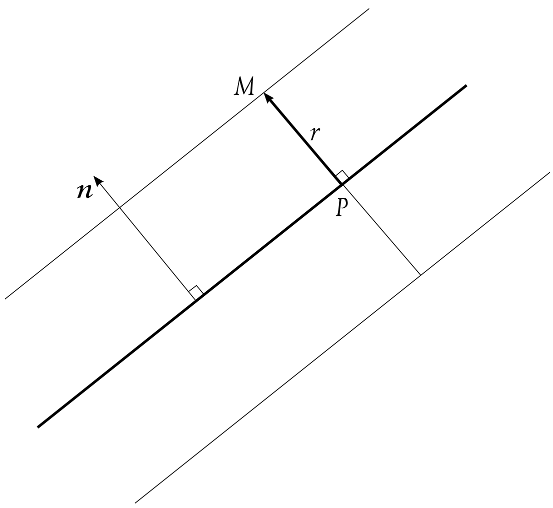

Рис. 5

Уравнение одной из прямых получено. В качестве вектора нормали для другой прямой можно использовать вектор $-\overrightarrow{PM}$. В этом случае имеем

$$c_2=-ax_0-by_0+r\sqrt{a^2+b^2}.$$

1.5. Уравнение биссектрисы угла.

Пусть векторы $\overrightarrow{P_0P_1}$ (x_1, y_1) и $\overrightarrow{P_0P_2}$ (x_2, y_2) приложены к точке $P_0(x_0, y_0)$. Найдем уравнение биссектрисы угла $P_1P_0P_2$. Если мы разделим каждый из векторов $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_0P_2}$ на его длину, получив при этом векторы единичной длины, то вектор их суммы будет лежать на биссектрисе угла между ними (*рис.* 6). Координаты этого вектора равны

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}+\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}},\ \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}+\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

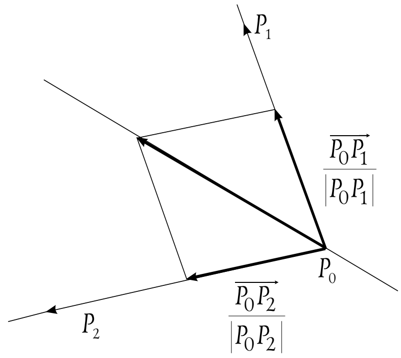

Рис. 6

Из условия его коллинеарности вектору $\overrightarrow{P_0P}$, где $P(x, y)$ — произвольная точка на искомой прямой, получаем уравнение биссектрисы:

$$\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}+\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right)(x-x_0)-$$
$$-\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}+\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right)(y-y_0)=0. \tag{9}$$

При необходимости из (9) несложно получить коэффициенты a, b и c для записи уравнения найденной прямой в виде (4).

1.6. Уравнение окружности.

По определению окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом r, точка $M(x, y)$ принадлежит ей тогда и только тогда, когда расстояние между M_0 и M равно r. Записав формулу для вычисления квадрата расстояния между двумя точками, мы придем к следующему уравнению окружности:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \tag{10}$$

На практике оказывается полезным знание также и параметрических уравнений окружности. Обратимся сначала к окружности с центром в начале координат. Если обозначить за t — угол между радиусом-вектором OM (здесь $M(x, y)$ — произвольная точка окружности) и осью Ox, отсчитываемый против часовой стрелки, то очевидно, что $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Значит, для произвольной окружности параметрические уравнения будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos t, \\ y &= y_0 + r\sin t. \end{aligned} \qquad (11)$$

В заключение покажем, как определить длину l наименьшей дуги окружности, если известны координаты центра окружности (x_0, y_0) и концов дуги (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Из курса геометрии известно, что длина окружности прямо пропорциональна углу φ между векторами $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ и $(x_2 - x_0, y_2 - y_0)$: $l = r\varphi$. А как вычислить значение такого угла, уже было показано выше (надо только учесть, что в случае поиска длины наименьшей из двух дуг нас интересует неориентированный угол в диапазоне $[0, \pi]$).

1.7. Касательные к окружности.

Пусть окружность имеет центр в точке $P_0(x_0, y_0)$ и радиус r. Требуется найти уравнение касательных к ней, проходящих через точку $P_1(x_1, y_1)$. Здесь возможны три случая. Если $|P_0P_1| < r$, то P_1 лежит внутри окружности и касательных, проходящих через нее, не существует. Если $|P_0P_1| = r$, то P_1 лежит на окружности. Тогда у искомой касательной нам известны точка P_1 и нормаль $\overrightarrow{P_1P_0}$, и ее уравнение легко выписывается (см. п. 1.3). Наконец, в случае $P_0P_1 > r$ точек касания две, и, обозначив одну из них P_2, мы имеем прямоугольный треугольник $P_0P_2P_1$ (*рис.* 7). Можно попытаться найти искомое уравнение "в лоб". Если (x_2, y_2) — координаты точки касания P_2, то по теореме Пифагора выписывается длина отрезка P_1P_2 ($P_0P_2 = r$, P_0P_1 вычисляется по известным координатам). Другое соотношение на координаты x_2 и y_2 — уравнение окружности (10). Оба эти уравнения квадратные. Решение такой системы уравнений представляет серьезную трудность для учащихся. Попробуем обойтись без квадратных уравнений, используя скалярное и косое произведения векторов.

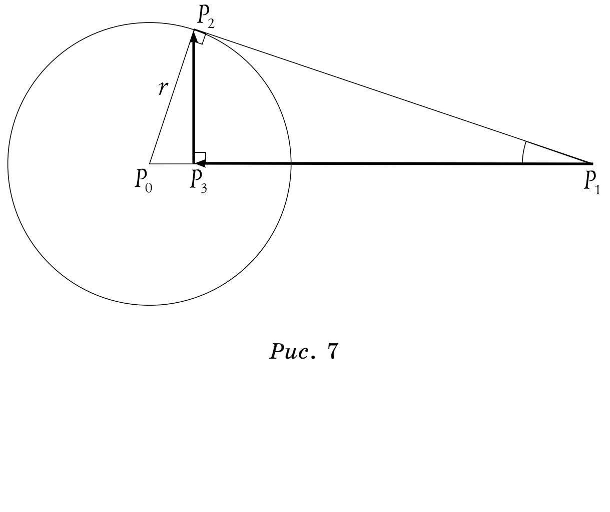

***Рис.* 7**

Мы будем искать координаты $a = x_2 - x_1$ и $b = y_2 - y_1$ вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$. Как уже было сказано выше, длины сторон прямоугольного треугольника $P_0P_2P_1$ легко находятся. Выпишем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1P_0}$:

$$(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_0}) = |P_1P_2| \cdot |P_1P_0| \cdot \cos\varphi = |P_1P_2|^2.$$

Геометрический смысл косого произведения $[\overrightarrow{P_1P_0}, \overrightarrow{P_1P_2}]$ — удвоенная площадь треугольника $P_0P_2P_1$, взятая со знаком плюс для одной из точек касания и с минусом — для другой:

$$[\overrightarrow{P_1P_0}, \overrightarrow{P_1P_2}] = \pm|P_0P_2| \cdot |P_1P_2|.$$

Записывая эти же произведения в координатах, получим систему линейных уравнений относительно a и b:

$$\begin{aligned} (x_0 - x_1) \cdot a + (y_0 - y_1) \cdot b &= |P_1P_2|^2, \\ (x_0 - x_1) \cdot b - (y_0 - y_1) \cdot a &= \pm|P_0P_2| \cdot |P_1P_2|. \end{aligned}$$

Такую систему решить уже несложно. Далее по точке $P_1(x_1, y_1)$ и направляющему вектору $\overrightarrow{P_1P_2} = (a, b)$ выписывается уравнение касательной. Задача решена. Если же нам требуется еще найти и координаты точки касания, то это можно сделать, используя координаты точки P_1 и найденные координаты вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$.

К решению этой же задачи есть подход, при котором не приходится решать даже систему линейных уравнений. Опустим из вершины P_2 прямого угла высоту P_2P_3 (*рис.* 7). Из подобия треугольников $P_1P_2P_0$ и $P_1P_3P_2$ найдем длины отрезков P_1P_3 и P_3P_2: $|P_1P_3| = \dfrac{|P_1P_2|^2}{|P_0P_1|}$; $|P_2P_3| = \dfrac{|P_1P_2| \cdot |P_0P_2|}{|P_0P_1|}$. Теперь последовательно находим координаты вектора $\overrightarrow{P_1P_3}$, точки $P_3(x_3, y_3)$ и, наконец, используя известные координаты вектора $\boldsymbol{n} = (y_0 - y_1, x_1 - x_0)$, перпендикулярного прямой P_1P_3, координаты точки P_2:

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \frac{|P_1P_3|}{|P_1P_0|};$$

$$x_3 = x_1 + (\overrightarrow{P_1P_3})_x, \quad y_3 = y_1 + (\overrightarrow{P_1P_3})_y;$$

$$\overrightarrow{P_3P_2} = \boldsymbol{n} \cdot \frac{|P_3P_2|}{|\boldsymbol{n}|};$$

$$x_2 = x_3 + (\overrightarrow{P_3P_2})_x, \quad y_2 = y_3 + (\overrightarrow{P_3P_2})_y.$$

Продолжение в № 41/2002

Вычислительная геометрия на плоскости

Е.В. Андреева, Ю.Е. Егоров,
Москва

Продолжение. Начало в № 39/2002

Взаимное расположение точек и фигур

2.1. Расположение точки относительно прямой, луча или отрезка.

В первую очередь в этой задаче нас интересует принадлежность данной точки $P(x, y)$ указанному геометрическому объекту, уравнение которого нам известно (либо может быть легко получено). Чтобы ответить на этот вопрос для прямой, достаточно подставить координаты заданной точки в уравнение прямой (3) или (4). Равенство нулю значения полученного выражения (для вещественных координат или коэффициентов уравнения проверку на равенство нулю необходимо осуществлять с учетом погрешности) означает, что точка принадлежит данной прямой. Если значение выражения меньше нуля, то точка лежит в одной полуплоскости от прямой, если больше нуля — в другой. Действительно, уравнение (3) получено в предположении, что прямая проходит через точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Заметим, что левая часть (3) — это значение косого произведения векторов $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{P_1P_2}$. Его знак определяет ориентацию этой пары векторов, иначе говоря, принадлежность точки P одной из полуплоскостей (а равенство нулю — принадлежность прямой).

Если прямая изначально задана двумя своими точками, то для решения данной задачи достаточно вычислить значение указанного косого произведения, а уравнение прямой выписывать не нужно.

В случае проверки принадлежности точки лучу при равенстве $[\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}]$ нулю (здесь P_1 — начало луча, а P_2 — любая точка, принадлежащая лучу) полезно вычислить и скалярное произведение этих же векторов. Если оно меньше нуля, то P_1 лежит на прямой между P_2 и P, следовательно, P лучу не принадлежит. Чтобы в аналогичной ситуации убедиться в принадлежности точки P отрезку P_1P_2, необходимо вычислить еще и значение скалярного произведения $(\overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{P_2P})$. Если оно неотрицательно, то точка P лежит на отрезке.

Пусть теперь нам требуется определить, на каком расстоянии находится заданная точка P от определенной прямой, луча или отрезка. Формула для расстояния от точки до прямой получается из сопоставления двух способов вычисления площади треугольника: $2S = h \cdot |P_1P_2| = |[PP_1, PP_2]|$ (см. *рис.* 8). То есть расстояние h от точки P до прямой, заданной координатами точек P_1 и P_2, можно подсчитать как отношение модуля косого произведения векторов $\overrightarrow{PP_1}$ и $\overrightarrow{PP_2}$ к длине отрезка P_1P_2.

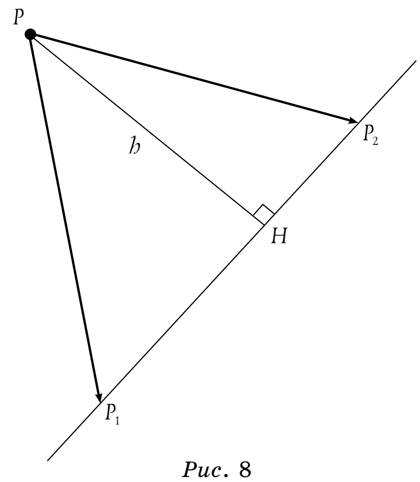

Рис. 8

Для луча или отрезка указанный способ нахождения расстояния нужно слегка подкорректировать. Точка H (*рис.* 8) принадлежит лучу P_1P_2 в том и только том случае, когда скалярное произведение $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P}) \geq 0$. Для отрезка P_1P_2, конечно, нужно еще и выполнение условия $(\overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{P_2P}) \geq 0$. Тогда применима формула расстояния от точки до прямой. В противном случае расстояние от точки до луча (отрезка) будет равно расстоянию от точки до начала луча (до ближайшего конца отрезка).

2.2. Взаимное расположение двух точек относительно прямой.

Обычно требуется просто выяснить, по одну или разные стороны от определенной прямой лежат две точки P_1 и P_2, заданные своими координатами. Выберем на прямой две произвольные несовпадающие точки — P_3 и P_4 (ими могут быть как раз те точки, которыми определена наша прямая). Тогда, если косые произведения $[\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]$ и $[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}]$ имеют разный знак, то есть $[\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}] \cdot [\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] < 0$, то точки лежат по разные стороны от прямой; если знаки совпадают — то по одну сторону, а если одно из них равно 0, то соответствующая точка лежит на исходной прямой. Вообще же эта задача является частью следующей, более сложной, задачи.

2.3. Взаимное расположение двух прямых или прямой и отрезка.

Легко выяснить, пересекаются ли две прямые или параллельны. Напомним еще раз, что условие коллинеарности двух векторов — это равенство нулю их косого произведения. Если прямые заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то удобно перейти к их нормалям $\boldsymbol{n_1} = (a_1, b_1)$ и $\boldsymbol{n_2} = (a_2, b_2)$. Тогда условие коллинеарности нормалей (а значит, и параллельности прямых): $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Если прямые заданы парами точек, то таким же способом проверяется коллинеарность направляющих векторов. Проверка наличия пересечения прямой и отрезка нами фактически уже была произведена при решении задачи 2.2.

Пусть прямая и отрезок пересекаются в одной точке. Найдем ее.

Обозначим концы отрезка $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Пусть $P_3(x_3, y_3)$ и $P_4(x_4, y_4)$ — две точки на прямой, а M — искомая точка пересечения (*рис.* 9). Опустим из концов отрезка на прямую перпендикуляры P_1H_1 и P_2H_2. Треугольники $P_3P_1P_4$ и $P_3P_2P_4$ имеют общее основание. Следовательно, отношение их площадей равно отношению их высот $|P_1H_1|$ и $|P_2H_2|$. Но площадь (ориентированная) треугольника $P_3P_1P_4$ — это $\frac{1}{2}[\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]$, аналогично выражается площадь $P_3P_2P_4$. То есть

$$\frac{|[\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]|}{|[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}]|} = \frac{|P_1H_1|}{|P_2H_2|} = \frac{|P_1M|}{|P_2M|}.$$

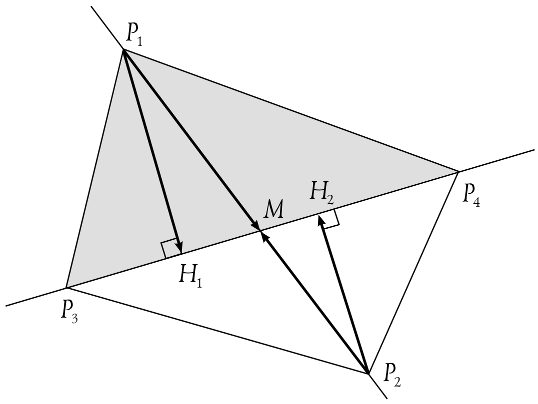

***Рис.* 9**

Последнее равенство вытекает из подобия треугольников P_1H_1M и P_2H_2M. Отсюда получаем

$$[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] \cdot \overrightarrow{P_1M} = [\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}] \cdot \overrightarrow{P_2M}. \qquad (12)$$

В этой формуле учтено и то, что одна из площадей может быть равна нулю, и то, что указанные площади имеют одинаковые знаки в точности тогда, когда точки P_1 и P_2 лежат по одну сторону от прямой P_3P_4 (то есть когда векторы $\overrightarrow{P_1M}$ и $\overrightarrow{P_2M}$ сонаправлены). Мы нашли, в каком отношении делится этот отрезок точкой M (внутренним или внешним образом). С другой стороны, $\overrightarrow{P_2M} = \overrightarrow{P_1M} - \overrightarrow{P_1P_2}$. Подставим это соотношение в (12). Далее выразить $\overrightarrow{P_1M}$ — дело техники:

$$\overrightarrow{P_1M} = \frac{[\overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_3P_1}]}{[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] - [\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]}\overrightarrow{P_1P_2} = \qquad (13)$$

$$= \frac{[\overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_3P_1}]}{[\overrightarrow{P_3P_2} - \overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]}\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{[\overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_3P_1}]}{[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}]}\overrightarrow{P_1P_2}.$$

(Здесь мы использовали свойство линейности косого произведения: $[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] - [\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}] = [\overrightarrow{P_3P_2} - \overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]$, которое легко устанавливается, если записать это равенство в координатах.) Теперь, зная координаты точки P_1 и вектор $\overrightarrow{P_1M}$, находим точку M.

Таким образом, мы нашли точку пересечения прямой и отрезка. Для нахождения пересечения двух прямых на одной из них выбираются произвольные точки P_1 и P_2, на другой — P_3 и P_4.

Может быть, вывод (13) не совсем элементарен, но саму формулу легко запомнить, если понять ее геометрический смысл. Так, если отрезки P_1P_2 и P_3P_4 пересекаются, то площадь четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$ по известной формуле есть половина произведения диагоналей на синус угла между ними. То есть по абсолютной величине косое произведение векторов $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_3P_4}$, стоящее в знаменателе формулы (13), — это удвоенная площадь четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$. В числителе же мы имеем удвоенную площадь треугольника $P_3P_4P_1$.

2.4. Определение взаимного расположения двух отрезков или лучей.

Проверить наличие пересечения у двух отрезков (а зачастую нас интересует лишь сам факт пересечения) несложно опять же с использованием косого произведения. Пусть первый отрезок задан точками P_1 и P_2, а второй — P_3 и P_4. Отрезки пересекаются тогда, когда, во-первых, пересекаются ограничивающие их прямоугольники и, во-вторых, концы каждого отрезка лежат по разные стороны от прямой, которой принадлежит другой отрезок. Первое из этих условий позволяет не рассматривать отдельно тот случай, когда отрезки лежат на одной прямой.

Обозначим x_{max1} и x_{min1} — максимальную и минимальную из x-координат первого отрезка, x_{max2} и x_{min2} — второго отрезка. Для y-координат имеем аналогично y_{max1}, y_{min1}, y_{max2} и y_{min2}. Тогда условия пересечения отрезков формально можно записать так:

1) $x_{max1} \ge x_{min2}$, $x_{max2} \ge x_{min1}$, $y_{max1} \ge y_{min2}$ и $y_{max2} \ge y_{min1}$;

2) косые произведения $[\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_2}]$ и $[\overrightarrow{P_1P_4}, \overrightarrow{P_1P_2}]$ имеют разный знак, точнее, $[\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_2}] \cdot [\overrightarrow{P_1P_4}, \overrightarrow{P_1P_2}] \le 0$;

3) аналогично $[\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}] \cdot [\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] \le 0$.

Если факт наличия пересечения нами уже установлен, то для отрезков, находящихся на пересекающихся прямых, точка пересечения ищется, как и в задаче 2.3. Для отрезков одной прямой их пересечение (точку или отрезок) можно найти путем подсчета значения двух скалярных произведений аналогично задаче 2.1 или с помощью сравнения координат концов отрезков.

Введем теперь понятие расстояния между двумя непересекающимися отрезками как минимальное среди расстояний между всеми парами точек двух отрезков. Несложно понять, что оно равно расстоянию от конца одного из отрезков до другого отрезка (задача 2.1). Поэтому для решения задачи достаточно подсчитать соответствующее расстояние для каждой из четырех концевых точек и выбрать из них минимальное.

Для проверки наличия пересечения двух лучей P_1P_2 и P_3P_4 следует изучить взаимное расположение соответствующих прямых. Равенство нулю косого произведения $[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}]$ означает принадлежность лучей параллельным прямым. Если эти прямые различны, то векторы $\overrightarrow{P_1P_3}$ и $\overrightarrow{P_1P_2}$ неколлинеарны и, значит, косое произведение $[\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_2}]$ отлично от нуля. В этом случае лучи не пересекаются. Когда лучи лежат на одной прямой, с помощью знака скалярного произведения $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_4})$ можно понять, в одну или в разные стороны они направлены. В первом случае скалярное произведение будет положительным, а во втором — отрицательным. Если лучи сонаправлены, то определить, какой из лучей является их пересечением, можно, подсчитав значение скалярного произведения $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3})$. Когда оно больше нуля, пересечением является луч P_3P_4, в противном случае — луч P_1P_2. В случае же противоположной направленности лучей их пересечение — либо отрезок P_1P_3, и тогда начало любого из двух лучей лежит внутри другого луча: $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) > 0$, либо одна точка $P_1 = P_3$: $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$, либо оно пусто: $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) < 0$.

Наконец, если прямые P_1P_2 и P_3P_4 пересекаются в одной точке M ($[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] \neq 0$), то найти эту точку можно так же, как в задаче 2.3. Затем следует проверить, что M принадлежит каждому из лучей: $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1M}) \geq 0$ и $(\overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_3M}) \geq 0$.

2.5. Взаимное расположение окружности и прямой.

Прямая может пересекать окружность в двух точках, касаться ее или не иметь с окружностью общих точек. Эти случаи легко определяются. Достаточно найти расстояние от центра окружности до данной прямой (по формуле расстояния от точки до прямой, см. 2.1). Если это расстояние (обозначим его l) меньше радиуса окружности r, то прямая пересекает окружность в двух точках, если равно ему, то прямая касается окружности, а если оно больше радиуса, то общих точек нет. В последнем случае нас может интересовать и расстояние от прямой до окружности. Оно равно $l - r$.

Более сложной является задача поиска общих точек прямой и окружности. Случай касания был рассмотрен нами в п. 1.7. Пусть теперь прямая и окружность пересекаются в двух точках. Координаты этих точек можно найти по следующему алгоритму (*рис.* 10). Найдем вектор n нормали к прямой. Отложим в направлении этого вектора вектор $\overrightarrow{OA}$ длины l. Вычислим расстояние $|AP_1| = |AP_2| = \sqrt{r^2 - l^2}$. От точки A вдоль прямой отложим в обе стороны векторы длины $|AP_1|$. Их концы дадут нам две искомые точки — P_1 и P_2. Каждый из шагов этого алгоритма в отдельности нами уже рассматривался ранее. Заметим только, что на первом шаге необходимо правильно выбрать одно из двух возможных направлений нормали к прямой. Для этого достаточно проверить, что скалярное произведение $(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{OM}) \geq 0$, где M — произвольная точка прямой.

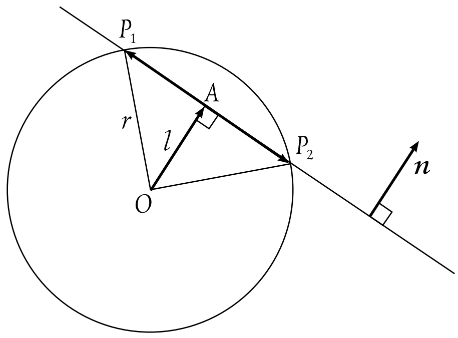

Рис. **10**

2.6. Взаимное расположение двух окружностей.

Две различные окружности также могут пересекаться в двух точках, касаться друг друга или не иметь общих точек. В последнем случае одна из окружностей может располагаться внутри другой (назовем такие окружности вложенными) или каждая из окружностей лежит вне другой.

Проверка наличия пересечения или касания аналогично предыдущей задаче осуществляется путем сравнения расстояния между центрами окружностей (обозначим его l) с их радиусами. Если $l > r_1 + r_2$ или $l < |r_1 - r_2|$, то окружности общих точек не имеют. Второе условие обозначает вложенность одной окружности в другую. При замене знака любого из этих двух неравенств на равенство мы получим случай касания окружностей (внешнего или внутреннего). Если же $|r_1 - r_2| < l < r_1 + r_2$, то окружности имеют ровно две точки пересечения.

Координаты точки касания окружностей найти очень просто. Ведь центры окружностей $O_1(x_1, y_1)$ и $O_2(x_2, y_2)$ задают прямую, на которой лежит и точка касания $P(x_3, y_3)$. Будем считать, что точка O_1 является центром окружности большего радиуса. Тогда вектор $\overrightarrow{O_1P}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{O_1O_2}$. Длины обоих векторов также известны, поэтому искомые координаты равны $\left(\frac{x_1 + (x_2 - x_1)r_1}{l}, \frac{y_1 + (y_2 - y_1)r_1}{l}\right)$. Проверьте, что если $r_1 < r_2$, то в случае вложенности окружностей полученная формула нуждается в корректировке.

При поиске координат двух точек пересечения окружностей воспользуемся механизмом, уже описанным в задаче 1.7. Рассмотрим треугольник O_1O_2P (*рис.* 11). В нем нам известны длины всех трех сторон ($r_1 > r_2$ и l). Проведем в треугольнике высоту PH. В получившемся прямоугольном треугольнике O_1HP неизвестны длины катетов. Найдем O_1H, записав теорему косинусов для треугольника O_1O_2P: $r_2^2 = r_1^2 + l^2 - 2lr_1 \cdot \cos\varphi = r_1^2 + l^2 - 2l \cdot |O_1H|$. Отсюда $|O_1H| = \frac{(r_1^2 + l^2 - r_2^2)}{2l}$.

По теореме Пифагора $|HP| = \sqrt{r_1^2 - |OH_1|^2}$. Теперь последовательно находим: вектор $\overrightarrow{O_1H} = \frac{|O_1H|}{l}\overrightarrow{O_1O_2}$, точку H по известной точке O_1 и вектору $\overrightarrow{O_1H}$, вектор $\boldsymbol{n} = (y_2 - y_1, x_1 - x_2)$, перпендикулярный O_1O_2, вектор $\overrightarrow{HP} = \frac{|HP|}{|\boldsymbol{n}|}\boldsymbol{n}$, наконец, точку P по известной точке H и вектору $\overrightarrow{HP}$. Заменив в последнем действии вектор $\overrightarrow{HP}$ на противоположный, получим и вторую точку пересечения окружностей.

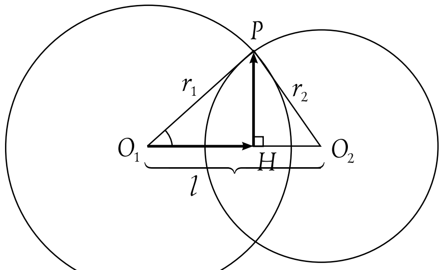

Рис. 11

Заметим, что при решении задач 1.7, 2.5 и 2.6 мы используем “пошаговые” алгоритмы. А именно, анализируя чертеж, выделяем цепочку объектов (векторов, точек и т.п.), каждый из которых за один элементарный шаг получается из уже найденных объектов. Фактически мы последовательно восстанавливаем параметры объектов, выделенных нами на чертеже. Цепочка вычислений должна привести нас к ответу, при этом каждый шаг предельно прост и вполне очевиден. Не исключено, что у задачи имеется более короткое аналитическое решение (например, решение системы уравнений). Однако “пошаговый” метод в силу своей наглядности прозрачен и позволяет контролировать каждый шаг решения, а именно это качество может сыграть решающую роль при проверке алгоритма и отладке программы.

2.7. Проверка принадлежности точки внутренней области многоугольника.

Пусть M — некоторая точка плоскости. Требуется определить ее местонахождение относительно замкнутой ломаной, являющейся границей многоугольника. Рассмотрим сначала случай выпуклого многоугольника. Пусть заданные своими координатами вершины многоугольника P_0, P_1, ..., P_{n-1} перечислены в порядке его обхода против часовой стрелки. При таком обходе многоугольник лежит слева от границы. И, значит, если точка M лежит внутри многоугольника, то ориентированный угол между векторами $\overrightarrow{P_iM}$ и $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ отрицателен. Поэтому нам достаточно подсчитать величину косых произведений $[\overrightarrow{P_iM}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}]$, $i = 0, 1, ..., n - 1$; значение $i + 1$ берется по модулю n. Если все полученные при этом значения отрицательны, то точка M внутренняя. Если же одно из них равно нулю, а все остальные отрицательны, то M принадлежит границе многоугольника (убедитесь, что просто равенства нулю одного из значений не достаточно). В противном же случае точка M лежит вне нашего многоугольника.

Рассмотрим теперь произвольный многоугольник. Проведем горизонтальный луч из точки M, например, влево. Так как многоугольник ограничен, то всегда легко указать на этом луче точку $P(x, y)$, заведомо ему не принадлежащую. Далее подсчитаем количество пересечений отрезка PM с границей многоугольника. Если оно равно нулю или четно, то точка M лежит вне многоугольника, в противном случае — внутри него.

Количество пересечений отрезка PM с границей мы подсчитаем, рассмотрев по очереди пересечение отрезка PM с каждым из звеньев ломаной. При этом возможны следующие особые случаи.

1. Одно из звеньев ломаной целиком содержится внутри отрезка PM.
2. Звено ломаной касается отрезка PM.
3. M лежит на одном из звеньев ломаной.

В последнем случае M принадлежит границе многоугольника, и в подсчете общего числа пересечений необходимости нет. Для двух первых случаев поступим следующим образом. В первом случае пересечение будем игнорировать. Во втором — дополнительно проверим, “нижним” или “верхним” концом звено ломаной касается горизонтального отрезка PM. Если точкой касания является “нижний” конец звена, то пересечение игнорируется, а если “верхний” — то засчитывается. С учетом этого соглашения касание отрезка PM границы многоугольника в одних точках игнорируется, а в других точках считается дважды. Это не изменит четности числа пересечений, а только она важна при поиске ответа на вопрос данной задачи. Если же отрезок действительно пересекает ломаную в ее вершине, то, по нашему соглашению, число пересечений как раз увеличится на единицу (пересечение с верхним ребром засчитано не будет, а с нижним — будет). Например, на *рис.* 12 количество пересечений для верхней из исследуемых точек будет равно четырем (касание засчитано дважды), а для нижней точки — трем (касание не учтено, а пересечение в вершине ломаной учтено один раз).

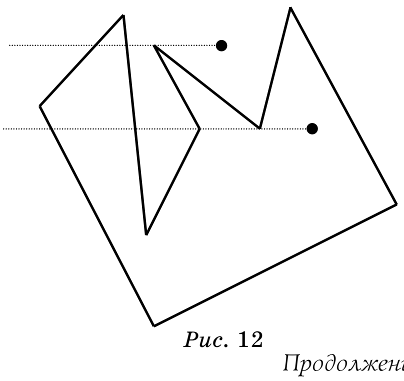

Рис. 12

Продолжение см. в № 41

Вычислительная геометрия на плоскости

Е.В. Андреева, Ю.Е. Егоров,
Москва

Продолжение. См. № 39, 40/2002

Особые точки многоугольников и множеств N точек плоскости

3.1. Построение окружности, описанной около треугольника или правильного N-угольника.

Пусть треугольник или правильный N-угольник задан координатами своих вершин. Для решения задачи нам достаточно найти координаты центра окружности, тогда ее радиус R будет выражаться через координаты центра и координаты любой из вершин. Тем не менее заметим, что сама по себе задача нахождения радиуса такой окружности для треугольника $P_1P_2P_3$ довольно проста и основана на сопоставлении двух формул для площади треугольника: $S = \frac{|[\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3}]|}{2} = \frac{|P_1P_2|\cdot|P_1P_3|\cdot|P_2P_3|}{4R}$. Напомним, что первый из этих способов следует из геометрического смысла косого произведения.

Из курса геометрии известно, что центр описанной около треугольника окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Координаты середины стороны треугольника представляют собой среднее арифметическое координат соответствующих вершин. Тогда задача нахождения уравнения серединного перпендикуляра совпадает с задачей 1.3 и по формуле (7) мы имеем

$$(x_2 - x_1)(x - \frac{x_1 + x_2}{2}) + (y_2 - y_1)(y - \frac{y_1 + y_2}{2}) = 0,$$

где $(x_i,\ y_i)$ — координаты точки P_i. Для нахождения центра искомой окружности теперь достаточно выписать уравнение еще одного серединного перпендикуляра (например, к отрезку P_1P_3) и найти заведомо существующую точку пересечения этих двух прямых.

Очевидно, что для правильного многоугольника решение может вообще ничем не отличаться от приведенного выше. Причем достаточно выписать уравнение двух любых несовпадающих серединных перпендикуляров. Ведь именно пересечение всех серединных перпендикуляров к его сторонам в одной и той же точке позволяет описать окружность около правильного N-угольника. Но есть способ лучше ☺. В случае четного N центр правильного N-угольника — это середина диагонали, проведенной, например, из первой вершины в $(\frac{N}{2}+1)$-ю, то есть его координаты представляют собой среднее арифметическое координат указанных вершин. При нечетном значении N центр лежит на прямой, соединяющей одну из вершин с серединой наиболее удаленной стороны, на расстоянии $R = \frac{a}{2\sin(\frac{\pi}{N})}$ от вершины, где a — длина стороны правильного N-угольника.

Заметим, что в правильном многоугольнике центр описанной окружности совпадает с центром единичных масс, помещенных в его вершины. Поэтому его положение можно также определить по формулам (15), см. 3.7.

3.2. Построение окружности, вписанной в треугольник или правильный N-угольник.

Как и в предыдущей задаче, радиус r такой окружности для треугольника легко найти из сопоставления формул для вычисления площади треугольника:

$$S = \frac{|[\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3}]|}{2} = r\frac{|P_1P_2| + |P_1P_3| + |P_2P_3|}{2}.$$

Центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис его углов. Для нахождения его координат достаточно выписать уравнения любых двух биссектрис (см. задачу 1.5) и найти точку их пересечения.

Центр же окружности, вписанной в правильный многоугольник, совпадает с центром его описанной окружности, а ее радиус равен расстоянию от центра до любой из сторон. Как и в случае описанной окружности, искомый радиус можно вычислить сразу, не находя центра, по формуле $r = \frac{a}{2\mathrm{tg}(\frac{\pi}{N})}$.

3.3. Окружность, “охватывающая” N точек плоскости.

Эта задача состоит в отыскании координат центра окружности минимально возможного радиуса, внутри которой находятся все заданные точки. Иногда эту проблему называют минимаксной задачей “о культурном центре”. В ней требуется по координатам домов в городе подобрать место для строительства культурного центра так, чтобы расстояние до максимально удаленного от него дома было минимальным. Для того чтобы понять решение этой задачи в общем случае, рассмотрим сначала “треугольный” вариант: $N = 3$.

Даже для трех точек вид решения существенно зависит от их взаимного расположения. Пусть точки лежат на одной прямой или образуют тупоугольный треугольник. Тогда искомая точка лежит на середине отрезка, соединяющего наиболее удаленные друг от друга точки (в середине наибольшей стороны тупоугольного треугольника). В самом деле, расстояние от этой точки до любой из первых двух уменьшить нельзя, а третья точка находится на меньшем расстоянии от найденной точки, следовательно, она лежит внутри окружности, диаметр которой образуют две другие точки. А для остроугольного треугольника решением является центр описанной вокруг него окружности (смещение искомой точки от него в любом направлении приведет к увеличению расстояния хотя бы до одной из точек). Способ его нахождения был показан в задаче 3.1. Прямоугольный треугольник является "пограничным" для этих двух случаев, то есть для него искомую точку можно находить любым из описанных способов (конечно, первый способ вычислительно более простой).

Для произвольного N также есть два случая. Если найдутся две такие точки, что окружность, построенная на соединяющем их отрезке, как на диаметре, содержит все остальные точки (то есть для них выполняется неравенство $(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \le r^2$, где (x_0, y_0) — центр окружности), то эта окружность — искомая (фактически это случай "тупоугольного треугольника"). Если же такой пары точек не нашлось, то искомая окружность заведомо проходит хотя бы через три из исходных точек. Поэтому теперь необходимо перебирать все тройки точек до тех пор, пока не найдется такая тройка, что проходящая через эти точки окружность будет заключать внутри себя все остальные точки (случай "остроугольного треугольника").

После того как суть решения стала понятной, можно задуматься над тем, как сделать его эффективным. Так, в [1] показано, что две наиболее удаленные друг от друга точки можно найти методом "разделяй и властвуй" за $O(N\log N)$ операций сравнения. В [4] утверждается, что и решение задачи в целом будет иметь ту же самую оценку сложности.

3.4. Наибольшая "пустая" окружность с центром внутри многоугольника, содержащего N точек.

Эту задачу можно интерпретировать как максиминную задачу "о химическом заводе". А именно, в черте города, граница которого известна, а дома заданы своими координатами, требуется выбрать место для строительства химического завода так, чтобы расстояние от него до ближайшего дома было максимальным. Фактически нам требуется найти окружность максимального радиуса, не содержащую внутри себя точки исходного множества, центр которой лежит внутри или на заданной ломаной.

Возможны три случая расположения центра искомой окружности. Сначала предположим, что он лежит внутри ломаной. Тогда окружность обязательно проходит через три точки заданного множества, иначе, очевидно, нашлась бы "пустая" окружность и большего радиуса. Поэтому переберем все неколлинеарные тройки точек и для каждой тройки рассмотрим проходящую через эти точки окружность. Из этих окружностей выберем те, центр которых лежит внутри ломаной и которые не содержат других точек. Найдем среди них окружность максимального радиуса (обозначим его r_1). Во втором случае центр искомой окружности лежит на ломаной, но не совпадает с ее вершиной. Если искомая окружность такова, то она однозначно определяется уже парой точек. Центры таких окружностей лежат на пересечении ломаной с серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему две точки (*рис.* 13). Обозначим максимальный радиус "пустых" окружностей этого вида r_2. Наконец, если центр искомой окружности совпадает с одной из вершин ломаной, то ее радиус будет определяться расстоянием до ближайшей к вершине точке (максимальный из таких радиусов — r_3). Ответом на нашу задачу будет являться одна из трех найденных окружностей, радиус которой есть $\max(r_1, r_2, r_3)$. В [4] указано, что поиск решения можно осуществить за $O(N\log N)$ операций.

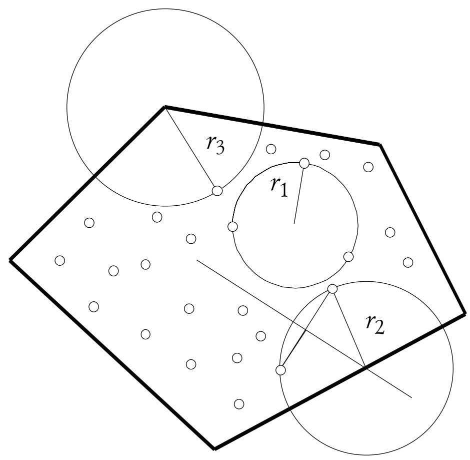

Рис. 13

Наш алгоритм имеет приемлемую вычислительную сложность, однако при его реализации приходится использовать решения сразу нескольких элементарных задач, рассмотренных выше. Как правило, для школьника полное решение оказывается слишком трудоемким. Поэтому покажем и приближенный (численный) метод решения этой задачи, слегка упростив ее. Воспользуемся идеями, изложенными в [5] при решении задачи "Фонтан". Предположим, что граничная ломаная представляет собой прямоугольник, левый нижний угол которого расположен в начале координат, а координаты правого верхнего (x_r, y_r) соответствуют длине и ширине прямоугольника. Это упрощение не уменьшает общности, поскольку каждый многоугольник можно заключить в прямоугольник и решить задачу для этого прямоугольника. Центры окружностей, лежащие вне заданного многоугольника, при этом следует из рассмотрения исключать.

Пусть мы хотим найти "пустую" окружность радиуса r. Тогда, чтобы проверить, что мы можем это сделать, проделаем следующую операцию: построим круги радиуса r с центрами в каждой из точек. Если эти круги покрывают прямоугольник полностью, то очевидно, что "пустой" окружности указанного радиуса r не существует. Любая же не покрытая такими кругами точка прямоугольника может служить центром "пустой" окружности. Этот прием в геометрии называют методом "раздутия". Мы свели первоначальную задачу к другой: задаче о покрытии.

3.5. Задача о покрытии.

Предположим, мы хотим проверить, что некоторый прямоугольник полностью покрывается заданным множеством кругов. Если все четыре его вершины покрываются одним кругом, то, очевидно, прямоугольник покрывается кругами полностью. В противном случае разобьем прямоугольник на четыре одинаковых прямоугольника и рекурсивно проверим, что каждый из них покрывается кругами. Для этого прямоугольники, не содержащиеся целиком внутри какого-либо одного круга, вновь будем делить на четыре равные части. Исключение составит случай, при котором вершина рассматриваемого прямоугольника оказывается вне всех кругов, т.е. является примером непокрытой точки. Будем продолжать разбиение, пока сторона прямоугольника не станет меньше некоторой заданной достаточно маленькой величины. Тогда предполагаем, что этот прямоугольник полностью кругами не покрывается, а его центр будем считать непокрытой точкой.

Рекурсивная функция check, выполняющая соответствующую проверку, приведена ниже.

```
const
  eps1 = 1e-6; {точность поиска непокрытой точки}
  eps2 = 1e-5; {точность поиска радиуса}
var fx, fy: real;
    {координаты центра пустой окружности}
  xr, yr: real; {размер прямоугольника}
  lb, rb, r: real; {r — искомый радиус}
function dist2(x1, y1, x2, y2:real): real;
{вычисляет квадрат расстояния между двумя точками}
begin
  dist2 := sqr(x1 - x2) + sqr(y1 - y2)
end;
function check(x1, y1, x2, y2:real): boolean;
{проверяет, что прямоугольник покрыт
 заданным множеством кругов;
 параметры — координаты левого верхнего и
 правого нижнего углов прямоугольника}
var i: longint;
  d1, d2, d3, d4, c1, c2, c3, c4: boolean;
begin
  if (abs(x1 - x2) < eps1) and
     (abs(y1 - y2) < eps1) then
   begin
  {центр прямоугольника — непокрытая точка}
     fx := (x1 + x2)/2;
     fy := (y1 + y2)/2;
     check := false; exit
  end;
  check := true;
  c1 := true; c2 := true;
  c3 := true; c4 := true;
 {проверяем покрытие одним кругом}
  for i := 1 to n do
   begin
    d1 := dist2(x1, y1, x[i], y[i]) <= r * r);
    d2 := dist2(x1, y2, x[i], y[i]) <= r * r);
    d3 := dist2(x2, y1, x[i], y[i]) <= r * r);
    d4 := dist2(x2, y2, x[i], y[i]) <= r * r);
    if d1 and d2 and d3 and d4 then
       begin
         check := true; exit
       end;
     c1 := c1 and not d1;
     c2 := c2 and not d2;
     c3 := c3 and not d3;
     c4 := c4 and not d4
   end;
  if c1 then {точка x1,y1 не покрыта}
   begin
     fx := x1; fy := y1;
     check := false; exit
   end;
  if c2 then {точка x1,y2 не покрыта}
   begin
     fx := x1; fy := y2;
     check := false; exit
   end;
  if c3 then {точка x2,y1 не покрыта}
   begin
     fx := x2; fy := y1;
     check := false; exit
   end;
  if c4 then {точка x2,y2 не покрыта}
   begin
     fx := x2; fy := y2;
     check := false; exit
   end;
  check := check(x1,y1,(x1 + x2)/2,(y1 + y2)/2) and
           check((x1 + x2)/2,y1,x2,(y1 + y2)/2) and
           check(x1,(y1 + y2)/2,(x1 + x2)/2,y2) and
           check((x1 + x2)/2,(y1 + y2)/2,x2,y2)
end;
```

Теперь мы легко можем решить и задачу о “пустой” окружности максимального радиуса. С помощью функции check искомый радиус окружности также можно найти численно алгоритмом деления пополам (дихотомией):

```
lb := 0; {левая граница}
if xr < yr then rb := xr/2
           else rb := yr/2; {правая граница}
while abs(lb - rb) > eps2 do
 begin
   r := (lb + rb)/2;
   if check(r, 0, 0, xr, yr) then rb := m
                              else lb := m
 end;
writeln(fx:0:4, ' ', fy:0:4, ' ', r:0:4);
```

Таким несложным способом задачу можно решить почти с любой наперед заданной точностью.

3.6. Кратчайшая сеть дорог.

Заданы *N* населенных пунктов (точек на плоскости). Необходимо так проложить между ними дороги, чтобы по этим дорогам возможно было проехать из любого пункта в любой другой, а суммарная длина дорог была минимальна. В отличие от похожей задачи построения минимального остова в теории графов в этой задаче мы не ограничены отрезками прямых, соединяющих заданные точки. При необходимости мы можем построить в произвольных местах плоскости новые точки пересечения участков дорог (так, для четырех точек, расположенных в вершинах квадрата, система дорог, составленная из двух диагоналей этого квадрата, предпочтительнее любого основного дерева, но и она не является оптимальной, см. на *рис.* 14 решения для прямоугольника.

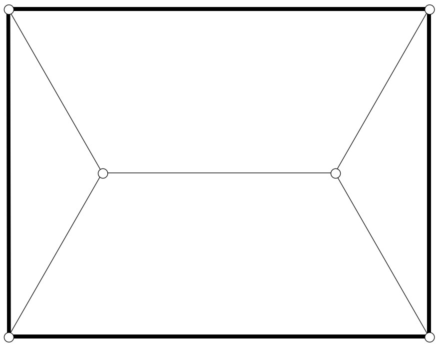

Рис. 14

Рассмотрим решение задачи для $N = 3$ (населенные пункты лежат в вершинах треугольника ABC).

Несложно понять, что в этом случае задача сводится к поиску точки, сумма расстояний от которой до всех вершин треугольника минимальна, и что такая точка должна лежать внутри или на стороне треугольника ABC. Будем предполагать, что каждый из углов треугольника ABC не превосходит 120°. Пусть D — произвольная точка. Рассмотрим треугольник $BC'D'$, полученный поворотом треугольника BCD вокруг точки B на 60° (*рис.* 15). В силу построения $DC = D'C'$ и $DD' = BD$ (треугольник BDD' — равносторонний). Поэтому искомая сумма расстояний для точки D равна $AD + BD + CD = AD + DD' + D'C'$ и, значит, нам нужно найти такую точку D, для которой длина ломаной $ADD'C'$ минимальна. Если в качестве точки D мы выберем точку S, показанную на *рис.* 15 ($\angle AC'B = \angle SCB$), то после поворота вокруг B на 60° она попадет на отрезок $C'S$. Таким образом, длина $ASS'C'$ окажется равной AC', что, конечно же, не больше длины любой другой ломаной $ADD'C'$. Значит, S и есть искомая точка. Она называется "точкой Штейнера". Заметим, что угол CSA равен 120°, так как луч CS переходит в луч $C'A$ при повороте на 60°. Понятно, что и две другие стороны треугольника должны быть видны из точки S под углом 120°.

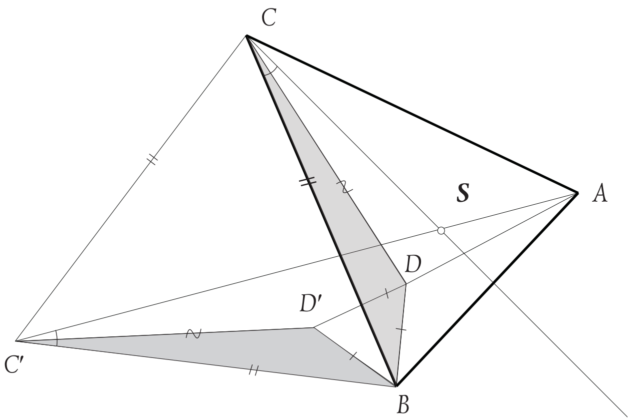

Рис. 15

Из проведенного анализа следует и способ построения точки Штейнера (*рис.* 16). Сначала ищем точки B' и C' как вершины равносторонних треугольников ABB' и BCC', построенные вне треугольника ABC. Поиск их координат производится с помощью вектора нормали, приложенного к середине соответствующей стороны треугольника (искомая точка находится на расстоянии $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ от середины стороны исходного треугольника, где a — длина соответствующей стороны). Остается определить точку S пересечения отрезков CB' и AC' (см. 2.3).

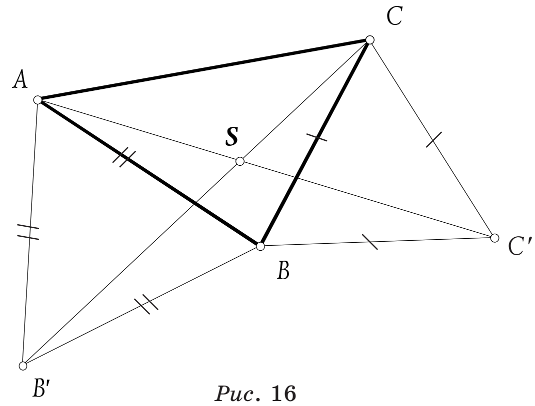

Рис. 16

Для треугольников, у которых один из углов больше 120° (в том числе выродившихся в отрезок), предложенное нами построение не годится. Действительно, в таком треугольнике нет точки, из которой бы все три стороны были видны под углом 120°. В этом случае решение задачи будет представлять собой систему из двух наименьших сторон треугольника.

Задача о минимальной сети дорог рассмотрена в прекрасной книге [3]. На *рис.* 14 показано решение этой задачи для четырех точек, расположенных в вершинах прямоугольника. Для произвольных N точек задача о кратчайшей сети дорог не решена. Поэтому поиск минимальной транспортной сети осуществляется с использованием компьютера. Однако все известные на сегодня алгоритмы позволяют построить решение лишь при небольших значениях N.

3.7. Центр масс.

В некоторых задачах геометрии очень полезным оказывается применение центра масс. Пусть на плоскости есть система материальных точек $A_1, A_2, ..., A_N$, имеющих массы $m_1, m_2, ..., m_N$ соответственно. Будем считать, что массы — неотрицательные числа (иногда допускают отрицательные или даже комплексные массы). Центром масс такой системы материальных точек называется точка M, для которой

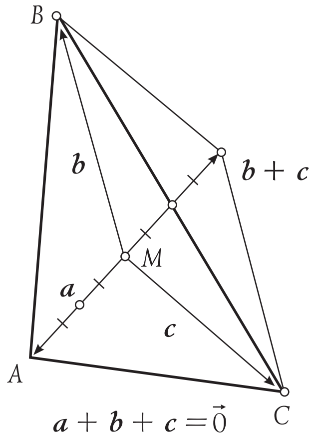

Рис. 17

$$m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + ... + m_N\overrightarrow{MA_N} = \vec{0}. \qquad (14)$$

Простой пример: точка пересечения медиан в треугольнике является центром трех равных масс, помещенных в вершинах этого треугольника. Это следует из теоремы о медианах (*рис.* 17).

Вернемся к N точкам. Пусть O — произвольная точка плоскости. Используя определение точки M, получим

$$m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_N\overrightarrow{OA_N} =$$
$$= m_1(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_1}) + m_2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_2}) + \ldots +$$
$$+ m_N(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_N}) = (m_1 + m_2 + \ldots + m_N)\overrightarrow{OM} +$$
$$+ m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + m_N\overrightarrow{MA_N} =$$
$$= (m_1 + m_2 + \ldots + m_N)\overrightarrow{OM}.$$

В качестве точки O можно взять начало координат. Тогда найдем координаты точки M:

$$x_M = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N},$$
$$y_M = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_Ny_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}, \qquad (15)$$

— где (x_i, y_i) — координаты A_i.

Применение центра масс основывается на его определении (14). Проиллюстрируем это на одном примере. На кировской командной олимпиаде в 2000 г. предлагалось решить следующую задачу (приведем ее в упрощенной формулировке).

Задача "Сеть"

Губернатор одной из областей заключил с фирмой "*HerNet*" контракт на подключение всех городов области к компьютерной сети. Сеть создается следующим образом: в области устанавливается станция спутниковой связи, и затем от каждого города прокладывается кабель до станции. Технология, используемая компанией, во избежание накопления ошибок требует при увеличении расстояния увеличения толщины кабеля. Стоимость кабеля, соединяющего город со станцией, при используемой компанией технологии будет равна kL^2, где L — расстояние от города до станции, а k — некий коэффициент. Требуется определить положение станции, при котором затраты компании на установку сети минимальны.

Поместим в каждый город массу k, и пусть M — центр масс полученной системы равных точечных масс. Если станцию установить в точке P, то стоимость s всего кабеля вычисляется так:

$$s = \sum k\,|\overline{PA_i}|^2 = k\sum(\overline{PM} + \overline{MA_i},\ \overline{PM} + \overline{MA_i}) =$$
$$= k\sum|\overline{PM}|^2 + k\sum(\overline{PM},\ \overline{MA_i}) + k\sum|\overline{MA_i}|^2 =$$
$$= k\sum|\overline{PM}|^2 + (\overline{PM},\ k\sum\overline{MA_i}) + k\sum|\overline{MA_i}|^2 =$$
$$= k\sum|\overline{PM}|^2 + k\sum|\overline{PA_i}|^2.$$

Очевидно, величина s минимальна, когда $\overline{PM} = \vec{0}$, т.е. когда станция находится в центре масс. Значит, координаты искомой точки вычисляются по формуле (15): $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}, \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_N}{N}\right)$. Более того, можно представить себе, что по какой-либо причине коэффициент k зависит от местности и является своим для каждого города. Наше решение легко адаптируется к этому: нужно поместить в каждый город массу, равную соответствующему коэффициенту. Та же выкладка показывает, что станцию следует ставить в центре масс получившейся системы материальных точек.

Окончание следует

Калейдоскоп

МУХА-РОБОТ...

На протяжении трех с половиной лет Рон Фиеринг, профессор университета в г. Беркли (США), разрабатывает миниатюрную механическую муху, в создании которой заинтересованы как военные ведомства США, так и медицина. Эту муху-робота можно с полным правом назвать миниатюрной — размах крыльев составляет всего 25 мм. В будущем железная муха будет способна копировать поведение обычной комнатной мухи, жужжа и маневрируя в воздухе. Пока же ученым удалось создать полетный модуль с ограниченными летательными способностями.

Тело мухи-робота строится из тонкой нержавеющей стали, и процесс его формирования напоминает японскую технику оригами. Разработчики берут плоскую стальную пластину и делают на ней лазером надрезы нужной формы и размеров. Затем пластина сворачивается и превращается в полую структуру, состоящую из множества тончайших пластинок из нержавеющей стали.

Источником питания, который позволит мухе-роботу самостоятельно перемещаться в пространстве, будут литиевые батарейки или даже панели солнечных элементов. "Сердцем" робота станет мотор из пьезоэлектрических материалов. Маленькие керамические кристаллы, на которые подается высокое напряжение, дадут возможность крыльям двигаться.

Заказчиком проекта выступил отдел исследований военно-морского флота, чьи специалисты заинтересованы в использовании мухи-робота в военных целях — для наблюдения, слежения и т.п. Кроме того, разработчики считают возможным использовать стальную муху как основу для создания роботов-хирургов, применяемых в медицине: размеры робота не превышают в диаметре 5 мм, что позволяет проводить операции внутри человеческого тела.

По материалам журнала "ПЛ: Компьютеры"

...И НАСТОЯЩИЙ ТАРАКАН

Группа японских ученых "оборудовала" живого таракана электроникой. На насекомом смонтированы малюсенькая фотокамера и микрофон, весящие в два раза больше, чем он. Чтобы установить такое оборудование, у таракана удалили усики и крылья.

Зачем же было создавать это чудо техники? Дело в том, что таракан исключительно живучее и выносливое насекомое, которому не страшны ни радиация, ни яды, да и еды ему практически не требуется. Эти уникальные возможности можно использовать с целью поиска людей под завалами и для "шпионских" нужд. В любом случае таракан теперь может стать помощником человека.

По материалам журнала "Мир ПК"

Вычислительная геометрия на плоскости

Е.В. Андреева, Ю.Е. Егоров,
Москва

Продолжение. Начало в № 39, 40/2002

Многоугольники

4.1. Определение вида треугольника.

Сначала рассмотрим, как для трех вещественных чисел a, b и c проверить, существует ли треугольник, длины сторон которого равны указанным числам. Как известно, для положительных a, b и c необходимым и достаточным условием существования треугольника является выполнение неравенств треугольника: $a + b > c$, $a + c > b$ и $b + c > a$. Оказывается, что проверки справедливости только этих неравенств достаточно в любом случае. Действительно, складывая первые два неравенства, получим $2a + b + c > b + c$, откуда $a > 0$. Из других пар неравенств имеем $b > 0$ и $c > 0$. Значит, проверку знака a, b и c выполнять не нужно!

Если треугольник задан координатами своих вершин, то вычислять длины его сторон и проверять неравенства треугольника не требуется. В этом случае треугольник не существует тогда и только тогда, когда данные точки лежат на одной прямой. Так ли это, можно проверить, вычислив значение косого произведения $[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}]$. Если оно равно нулю, то соответствующие векторы коллинеарны, т.е. все три точки лежат на одной прямой.

Как выяснить по координатам вершин треугольника, остроугольный он, прямоугольный или тупоугольный? Для этого достаточно знать, каким является наибольший из его углов. Вид угла легко определяется по знаку скалярного произведения образующих его векторов: оно положительно для острого угла, равно нулю для прямого и отрицательно для тупого. Поэтому подсчитаем все три скалярных произведения, перемножим их между собой и по знаку произведения определим вид треугольника. Обратите внимание на то, что значения самих углов для ответа на поставленный вопрос подсчитывать не нужно.

4.2. Проверка выпуклости многоугольника.

Выпуклость многоугольника с вершинами P_1, P_2, ..., P_n, перечисленными в порядке его обхода, легко проверить, если вычислить знаки косых произведений $[\overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \overrightarrow{P_{i+1}P_{i+2}}]$, $i = 1, ..., n$ (здесь P_{n+1} есть P_1, а P_{n+2} — P_2). У выпуклого многоугольника знаки всех указанных произведений либо неположительны, либо неотрицательны (то есть знаки ненулевых произведений совпадают). Если мы знаем направление обхода, то знак косых произведений для выпуклого многоугольника определен: при обходе по часовой стрелке все косые произведения неположительны, а против часовой стрелки — неотрицательны.

4.3. Вычисление площади простого многоугольника.

Под простым мы понимаем такой многоугольник, граница которого не имеет самокасаний и самопересечений. Пусть вершины P_1, P_2, ..., P_n простого многоугольника перечислены в порядке обхода его границы. Напомним, что для вычисления его ориентированной площади нужно сложить ориентированные площади треугольников OP_1P_2, OP_2P_3, ..., OP_nP_1, где O — произвольная точка плоскости. Модуль полученной величины и есть искомая площадь:

$$S = \frac{1}{2}\left|\Sigma_{i=1}^{\ n} [\overrightarrow{OP_i}, \overrightarrow{OP_{i+1}}]\right|, \qquad (16)$$

— где полагается $P_{n+1} = P_1$. В качестве точки O в некоторых задачах бывает разумно выбрать одну из вершин многоугольника. Если же в качестве точки O взять начало координат, то формула (16) запишется в другом виде, также удобном для программирования:

$$\begin{aligned} S = &\frac{1}{2}|(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + ... \\ &+ (x_ny_1 - x_1y_n)| = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_n) + \\ &+ x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + ... + \\ &+ x_n(y_1 - y_{n-1})|, \end{aligned} \qquad (17)$$

— где (x_i, y_i) — координаты точки P_i.

4.4. Построение выпуклой оболочки для множества из N точек плоскости.

Выпуклой оболочкой некоторого заданного множества точек называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих заданное множество. Для конечного множества точек выпуклой оболочкой всегда будет выпуклый многоугольник, все вершины которого являются точками исходного множества.

Задача состоит в том, чтобы для заданного конечного множества точек найти вершины выпуклой оболочки этого множества. Будем перечислять вершины в порядке обхода против часовой стрелки. Для эффективного решения этой задачи существует несколько различных алгоритмов (см. [1, 4]). Приведем наиболее простую реализацию одного из них — алгоритма Джарвиса. Этот алгоритм иногда называют “заворачиванием подарка” (см. *рис.* 18).

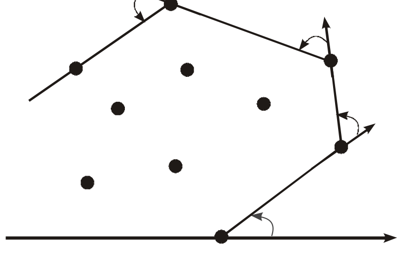

Рис. 18

Перечисление точек искомой границы выпуклого многоугольника начнем с правой нижней точки P_1, которая заведомо принадлежит границе выпуклой оболочки. Обозначим ее координаты (x_1, y_1). Следующей при указанном порядке обхода будет точка $P_2(x_2, y_2)$. Она, очевидно, обладает тем свойством, что все остальные точки лежат “слева” от вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$, т.е. ориентированный угол между векторами $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1M}$ неотрицателен для любой другой точки M нашего множества. Для кандидата на роль точки P_2 проверяем выполнение условия $[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1M}]$? 0 со всеми точками M. Если точек, удовлетворяющих этому условию, несколько, то вершиной искомого многоугольника станет та из них, для которой длина вектора $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ максимальна.

Будем поступать так же и дальше. Допустим, уже найдена i-я вершина $P_i(x_i, y_i)$ выпуклой оболочки. Для следующей точки $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ косые произведения $[\overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \overrightarrow{P_iM}]$ неотрицательны для всех точек M. Если таких точек несколько, то выбираем ту, для которой вектор $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ имеет наибольшую длину. Непосредственно поиск такой точки можно осуществлять так. Сначала мы можем считать следующей, $(i+1)$-й, любую точку. Затем вычисляем значение $[\overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \overrightarrow{P_iM}]$, рассматривая в качестве M все остальные точки. Если для одной из них указанное выражение меньше нуля, считаем следующей ее и продолжаем проверку остальных точек (аналогично алгоритму поиска минимального элемента в массиве). Если же значение выражения равно нулю, то сравниваем квадраты длин векторов. В результате за $O(N)$ операций очередная вершина выпуклой оболочки будет найдена. Продолжая эту процедуру, мы рано или поздно вернемся к точке P_1. Это будет означать, что выпуклая оболочка построена.

При решении данной задачи в случае изначально целочисленных координат мы полностью можем избежать применения вещественной арифметики, а следовательно, избавиться от потери точности вычислений. В противном случае в решение могут быть включены “лишние” точки, близкие к границе выпуклой оболочки, или не учтены некоторые из “нужных” точек. Сложность данного алгоритма составит $O(kN)$, где k — количество точек в выпуклой оболочке, в худшем случае равное N.

Программа решения данной задачи алгоритмом Джарвиса была приведена в [6]. Ее можно несколько упростить, поэтому приведем уточненный вариант реализации данного алгоритма. Множество исходных точек находится в массиве `a`, все точки, принадлежащие выпуклой оболочке, будем записывать в массив `b`.

```
type vv = record
           x, y: longint;
          end;
var a, b: array[1..100] of vv;
  min, m, i, j, k, n: integer;
function vect(a1,a2,b1,b2: vv): longint;
{косое произведение векторов a1a2 и b1b2}
begin
  vect := (a2.x - a1.x)*(b2.y - b1.y) -
          (b2.x - b1.x)*(a2.y - a1.y)
end;
function dist2(a1,a2: vv): longint;
{квадрат длины вектора a1a2}
begin
  dist2 := sqr(a2.x - a1.x) + sqr(a2.y - a1.y)
end;

begin {Main}
  readln(n);{количество точек}
  for i := 1 to n do
    read(a[i].x, a[i].y);
 {ищем правую нижнюю точку}
  m := 1;
  for i := 2 to n do
    if a[i].y < a[m].y then m := i else
    if (a[i].y = a[m].y) and
       (a[i].x > a[m].x) then m := i;
 {запишем ее в массив выпуклой оболочки b и
  переставим на первое место в массиве a}
  b[1] := a[m];
  a[m] := a[1];
  a[1] := b[1];
  k := 1;
  min := 2;
  repeat
   {ищем очередную вершину выпуклой оболочки}
    for j := 2 to n do
     if (vect(b[k],a[min],b[k],a[j]) < 0) or
       ((vect(b[k],a[min],b[k],a[j]) = 0) and
      (dist2(b[k],a[min]) < dist2(b[k],a[j])))
     then min := j;
    k := k + 1;
    {записана очередная вершина}
    b[k] := a[min];
    min := 1;
 until (b[k].x = b[1].x) and (b[k].y = b[1].y);
 {пока ломаная не замкнется}
  for j := 1 to k - 1 do {печать результата}
    writeln(b[j].x,' ',b[j].y)
end.
```

Существует другой алгоритм решения этой задачи (алгоритм Грэхема) с вычислительной сложностью $O(N \log N)$, основанный на предварительной сортировке точек исходного множества по значению угла в полярной системе координат с центром в одной из точек выпуклой оболочки. То есть наиболее трудоемкой задачей оказывается именно сортировка исходных точек. Сортировку точек можно производить по знаку косого произведения $[\overrightarrow{P_1P_i}, \overrightarrow{P_1P_{i+1}}]$, где P_1 — любая вершина выпуклой оболочки (например, все та же правая нижняя точка). В отсортированном массиве точек все указанные произведения должны быть неотрицательны. Точки с равными углами $([\overrightarrow{P_1P_i}, \overrightarrow{P_1P_{i+1}}] = 0)$ располагаются в порядке увеличения длин соответствующих векторов $\overrightarrow{P_1P_i}$ (*рис.* 19).

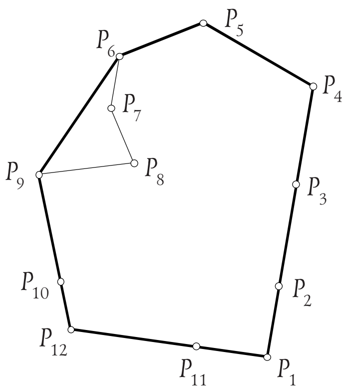

***Рис*. 19. Вершины выпуклой оболочки множества точек $\{P_i\}$: P_1, P_4, P_5, P_6, P_9, P_{12}. Номера всех точек соответствуют сортировке по полярному углу**

Далее просмотр Грэхема использует стек, в котором хранятся точки, являющиеся кандидатами в выпуклую оболочку. Сначала в стек помещается первая из отсортированных точек. Затем — соседняя с ней вершина выпуклой оболочки. Если на первом из лучей точек несколько, то это точка этого луча P_i, наиболее удаленная от P_1. Третьей — точка P_{i+1}. Пусть в вершине стека находится точка P_k. Рассмотрим следующую в порядке увеличения полярного угла точку исходного множества P_i. Пока участок ломаной $P_{k-1}P_kP_i$ не является выпуклым (см. задачу 4.2), из стека удаляется очередная точка P_k. Затем P_i помещается в стек. В момент окончания просмотра всех точек в стеке будут находиться в точности все вершины выпуклой оболочки. Так как любая точка добавляется в стек ровно один раз, то и удаляется она из него не более одного раза, поэтому время просмотра составляет $O(N)$.

Приведем реализацию именно такого просмотра. Для наглядности сортировку проведем пузырьковым алгоритмом. В качестве стека используется массив b. Описания переменных и функций совпадают с приведенными выше.

```
begin
  readln(n);
  for i := 1 to n do
    read(a[i].x, a[i].y);
 {ищем правую нижнюю точку}
  m := 1;
  for i := 2 to n do
    if a[i].y < a[m].y then m := i else
    if (a[i].y = a[m].y) and
       (a[i].x > a[m].x) then m := i;
 {запишем ее в массив выпуклой оболочки b и
  переставим на первое место в массиве a}
  b[1] := a[m];
  a[m] := a[1];
  a[1] := b[1];
 {остальные точки сортируем пузырьком
  по значению полярного угла}
  for i := n downto 3 do
    for j := 2 to i - 1 do
     if (vect(a[1],a[j],a[1],a[j + 1]) < 0) or
        ((vect(a[1],a[j],a[1],a[j + 1]) = 0 ) and
       (dist2(a[1],a[j]) > dist2(a[1],a[j + 1])))
        then
      begin {b[n] – вспомогательная переменная}
         b[n] := a[j];
         a[j] := a[j + 1];
         a[j + 1] := b[n]
       end;
 {ищем вторую вершину выпуклой оболочки}
  i := 2;
  while vect(a[1],a[i + 1],a[1],a[2]) = 0 do
    i := i + 1;
  b[2] := a[i];
  b[3] := a[i + 1];
  k := 3;
  for i := i + 2 to n do
   begin
    {проверка выпуклости}
     while vect(b[k – 1],b[k],b[k],a[i]) <= 0 do
        k := k – 1;{удаляем точку из стека}
      k := k + 1;
      b[k] := a[i] {добавляем точку в стек}
   end;
  for j := 1 to k do {печать решения}
    writeln(b[j].x,' ',b[j].y)
end.
```

На этом мы заканчиваем обзор решения элементарных задач вычислительной геометрии на плоскости. На них опирается решение более сложных, в частности олимпиадных, задач — см., например, [4—6]. Надеемся, что внимательному читателю данной статьи решение последних окажется теперь по силам.

Литература

1. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.* Алгоритмы. Построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000.

2. *Шикин Е.В., Боресков А.В., Зайцев А.А.* Начала компьютерной графики. М.: Диалог-МИФИ, 1993.

3. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика. М.: ОГИЗ, государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1947.

4. *Окулов С.М.* 100 задач по информатике. Киров: Изд-во ВГПУ, 2000.

5. *Станкевич А.С.* Решение задач I Всероссийской командной олимпиады по программированию. Информатика № 12/2001.

6. *Андреева Е.В.* Геометрические задачи на олимпиадах по информатике. Информатика № 14/2002.