Вступ

Навчальний посібник створено для студентів, які вивчають базовий нормативний курс “Дискретна математика”. У посібнику викладаються основи теорії графів. Він містить усі необхідні означення, формулювання та доведення теорем, а також багато задач. Його призначено для самостійної роботи; ним можна користуватися як при вивченні теоретичного курсу, так і під час практичних занять з дискретної математики.

Посібник складається з семи глав, у яких наводиться відповідний теоретичний матеріал і задачі. До кожної задачі наприкінці глави є відповідь, вказівка або розв’язання.

При підготовці посібника було використано, головним чином, матеріал класичних монографій [1, 2, 4, 5]. Враховано також набір задач у посібнику [3].

Теореми та рисунки мають наскрізну нумерацію; задачі нумеруються окремо по главах. Доведення теорем починаються й закінчуються символом “□”.

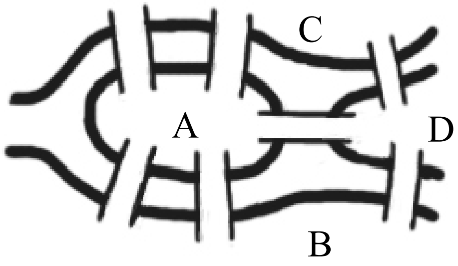
Глава 1. Основні поняття

1.1. Граф як модель

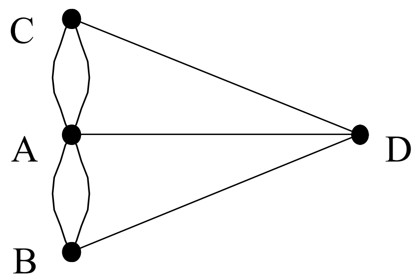
1.1.1. Виникнення теорії графів — задача про кенігсберзькі мости

Теорія графів "відкривалася" незалежно багато разів. Найперша згадка про неї зустрічається в роботах Ейлера, який у 1736 році розв'язав задачу про кенігсберзькі мости.

У Кенігсберзі було два острови, з'єднаних сімома мостами з берегами річки Прегель та один із одним (рис. 1, *а*). Задача полягала в пошуку маршруту проходження всіх чотирьох частин суші, який мав починатися на довільній з них, закінчуватися на ній же та по одному разу проходити кожен міст. Проте всі спроби знайти маршрут були невдалими.



а)



б)

Рис. 1. Кенігсберзькі мости та граф

Щоб довести неможливість існування такого маршруту, Ейлер позначив кожну частину суші точкою (*вершиною*, або *вузлом*), а кожен міст — лінією (*ребром*), що з'єднує відповідні точки, і одержав "граф" (рис. 1, *б*). Твердження про неіснування маршруту рівносильно неможливості спеціальним чином обійти граф. Виходячи з цього конкретного випадку, Ейлер узагальнив постановку задачі та знайшов критерій існування обходу.

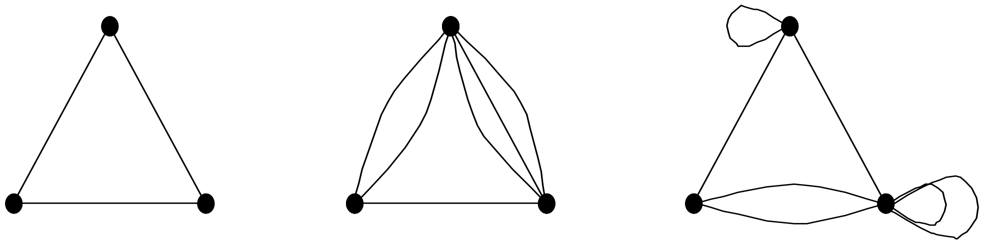
Пізніше елементи теорії графів з'явилися в таких природничих науках, як географія, фізика, хімія, електротехніка. Взагалі, графи застосовні в усіх галузях, де є елементи й зв'язки між ними, тому теорія графів є актуальним прикладним розділом математики.

1.1.2. Неформальне поняття графа. Приклади графових моделей

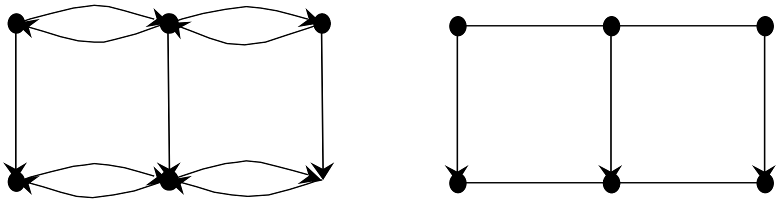
Неформально, граф виглядає як *діаграма*, тобто множина точок площини (*вершин*, або *вузлів*), з'єднаних між собою лініями (*ребрами*). Діаграма дає уяву про зв'язки між елементами (вершинами), але нічого не каже про метричні властивості (довжина ліній, їх форма тощо).

Залежно від типу ребер відрізняють кілька типів графів. *Петля* — це ребро, що з'єднує вершину саму з собою. У *мультиграфі* петлі не допускаються, але пари вершин можуть з'єднуватися кількома ребрами, які називаються *кратними*, або *паралельними*. У *псевдографі* допускаються петлі й кратні ребра. В *звичайному* *графі* немає ні петель, ні кратних ребер (рис. 2). В задачі про кенігсберзькі мости з’являвся мультиграф.

За допомогою графів подаються структурні залежності між елементами, наприклад, у електричній схемі, в молекулі, складеній з атомів, або у схемі міського транспорту. Для побудови графа, відповідного транспортній схемі, вершинами можна подати зупинки, а ребрами — ділянки маршрутів між зупинками. Схему доріг міста можна представити у вигляді мультиграфа, вершини якого відповідають перехрестям, а ребра — вулицям. Існують вулиці з одностороннім рухом, тому задається напрям руху по них (стрілки на рис. 2). Відповідний граф називається *орієнтованим*, або *орграфом*, а його орієнтовані ребра — *дугами*. Граф, що має орієнтовані та неорієнтовані ребра одночасно, називається *змішаним*.



а) граф б) мультиграф в) псевдограф

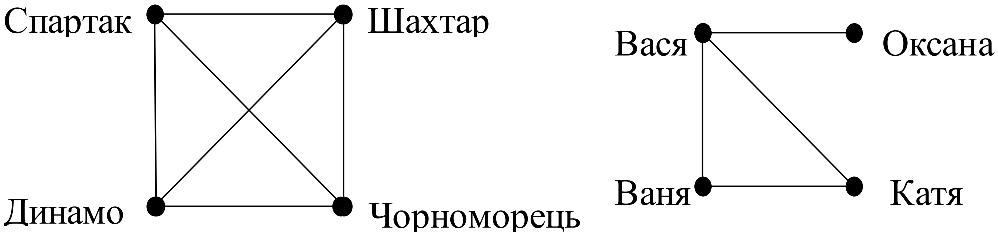


г) орграф д) змішаний граф

Рис. 2. Приклади графів різних типів

Розглянемо турнір між чотирма футбольними командами, в якому кожні дві зіграли між собою не більше одного матчу. Подамо турнір графом, вершинами якого є команди. Якщо дві команди зіграли між собою матч, з’єднаємо відповідні вершини ребром. Ситуації, у якій кожні дві команди зіграли між собою, відповідає граф на рис. 3, *а*.

Представимо графом знайомства між студентами. Кожного студента подамо вершиною графа, а ребрами з’єднаємо пари вершин, відповідних парам знайомих між собою (рис. 3, *б*).



а) б)

Рис. 3. Графи для турніра та знайомств

1.1.3. Формальне означення графа. Графи та бінарні відношення

Нехай V — непорожня скінченна множина, а $V^{(2)}$ — множина всіх двохелементних підмножин множини V. Нехай E — довільна підмножина $V^{(2)}$. Пара (V, E) називається *графом* (*неорієнтованим графом*), елементи множини V — *вершинами*, або *вузлами*, а елементи множини E — *ребрами*. Незважаючи на те, що кожне ребро $e \in E$ являє собою двохелементну множину $e = \{v, w\}$, в теорії графів його позначають (v, w) і називають *неупорядкованою парою* вершин.

Розглянемо переходи між діаграмами (без кратних ребер і петель) та графами в їх формальному поданні. Вершинам діаграми відповідають вершини графа, а кожній парі вершин, з'єднаних ребром — ребро графа (неупорядкована пара). Таким чином, діаграмі на рис. 3, *б* відповідає формальний об'єкт (V, E), де $V =$ {Вася, Ваня, Оксана, Катя}, $E =$ {(Вася, Ваня), (Вася, Оксана), (Вася, Катя), (Ваня, Катя)}. Аналогічно для переходу від формального подання графа до діаграми треба точками зобразити вершини та з'єднати лініями всі пари точок, відповідних ребрам графа.

Якщо E є підмножиною $V \times V$, причому в E немає пар вигляду (v, v), тобто петель, то (V, E) називається *орієнтованим графом* або *орграфом*. Елементи множини V називають *вершинами* (*вузлами*), а елементи E — *орієнтованими ребрами*, або *дугами*. Дуги (v, w) і (w, v) орграфа називаються *симетричними*. Орграф без пар симетричних дуг називається *направленим*. Кожну пару симетричних дуг між різними вершинами v та w можна розглядати як одне неорієнтоване ребро $\{v, w\}$.

Ребра та дуги мультиграфа не можна вважати двохелементними підмножинами множини вершин або їх парами. Один спосіб формального подання мультиграфа грунтується на тому, що його ребра — це абстрактні елементи, і мультиграф є трійкою вигляду (V, E, f), де f відображає E у $V^{(2)}$ (або у $V \times V$), тобто задає інцидентність вершин та ребер (дуг). За іншим способом мультиграф є парою (V, E), але ребра графа є трійками вигляду $(\{u, v\}, k)$, де k — номер, причому різні паралельні ребра мають різні номери. Аналогічно означаються й дуги в орієнтованих мультиграфах.

Довільне бінарне відношення R на множині V можна подати у вигляді орієнтованого графа (V, E), де дуга (v, w) належить множині ребер E тоді й тільки тоді, коли vRw, тобто $E = R$. І навпаки, кожний орієнтований граф визначає бінарне відношення на множині вершин.

Умова симетричності відношення означає, що для кожної дуги є симетрична. Умова антисиметричності — що граф не має симетричних дуг, тобто є направленим. Рефлексивність відношення гарантує, що з кожної вершини графа виходить петля. Таким чином, якщо відношення є симетричним та антирефлексивним, то для його подання достатньо неорієнтованого графа. І, навпаки, неорієнтований граф визначає симетричне й антирефлексивне відношення.

Задачі

1.1. Охарактеризувати відношення, відповідні орієнтованим графам без петель.

1.2. Неформально охарактеризувати графи, відповідні транзитивним відношенням.

1.3. Що можна сказати про рефлексивно-транзитивне замикання відношення, відповідного ациклічному направленому графу? Чи можна стверджувати, що направлені графи відповідають відношенням часткового порядку?

1.2. Вершини та ребра

1.2.1. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини

Нехай $G = (V, E)$ — граф, $e \in E$ — ребро. Кажуть, що ребро $e = (v, w)$ *з'єднує* вершини v і w, які є його кінцями. Вершини v і w називаються *суміжними*; кожна з них є *інцидентною* ребру e. Два різних ребра, інцидентних одній і тій самій вершині, називаються *суміжними*.

Степенем вершини v в графі G називається кількість ребер, інцидентних v, і позначається $\delta(v)$. Множину вершин, суміжних з вершиною v, позначають $O(v)$. Очевидно, що $|O(v)| = \delta(v)$.

У графі з n вершинами степінь вершини може мати значення від 0 до n-1. Вершина степеня 0 називається *ізольованою* (вона не має інцидентних ребер та суміжних вершин), а степеня 1 — *кінцевою*, або *висячею* (має тільки одне інцидентне ребро). Якщо вершина має степінь n-1, то вона суміжна з усіма іншими вершинами, й у графі немає ізольованих вершин. Аналогічно, якщо в графі є ізольована вершина, то немає вершини степеня n-1 (суміжної з усіма іншими). Отже, справджується наступне твердження.

Теорема 1. У будь-якому графі з n вершинами одночасно не можуть існувати вершини степенів 0 і n-1.

Теорема 2. У будь-якому графі з n вершинами ($n \geq 2$) є принаймні дві вершини з однаковими степенями.

□ Степені вершин можуть бути цілими значеннями від 0 до n-1. Але за теоремою 1 вершини степенів 0 і n-1 у графі одночасно існувати не можуть, тобто степенями вершин графа можуть бути лише n-1 різних чисел. Але вершин n, тому за принципом Діріхле обов'язково є принаймні дві вершини з однаковими степенями. □

Задача Рамсея. Довести, що серед довільних шести осіб знайдуться або троє попарно знайомих, або троє попарно незнайомих.

□ Переклавши задачу на мову теорії графів, одержимо твердження: у довільному графі $G = (V, E)$ з шістьма вершинами існують три вершини, які є або попарно суміжними, або попарно несуміжними.

Візьмемо довільну вершину $v \in V$ та відносно неї розділимо решту вершин на дві множини, що не перетинаються: $V_1 = \{w \mid w \in V \wedge (v, w) \in E\}$ — множина вершин, суміжних із v, і $V_2 = \{w \mid w \in V \wedge (v, w) \notin E\}$ — несуміжних. $V = V_1 \cup V_2 \cup \{v\}$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $|V| = 6$, тому $|V_1|+|V_2| = 5$, і хоча б одна з цих множин містить принаймні три вершини.

Перший випадок: $|V_1| \geq 3$. Якщо в множині V_1 є дві суміжні вершини, то разом з v вони утворюють три попарно суміжні вершини. Якщо жодні дві вершини несуміжні, то множина V_1 містить три попарно несуміжні вершини. (рис. 4)

Другий випадок: $|V_2| \geq 3$. Якщо в множині V_2 є дві несуміжні вершини, то разом з v вони утворюють три попарно несуміжні вершини. Якщо кожні дві вершини суміжні, то множина V_2 містить три попарно суміжні вершини (рис. 4).

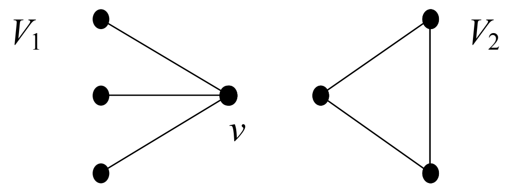


Рис. 4. Попарно несуміжні й попарно суміжні вершини

В обох випадках існують три вершини, що задовольняють умові задачі. □

Задачі

1.4. Кілька осіб (більше двох) проводять шаховий турнір в одне коло. У деякий момент виявилося, що тільки двоє шахістів зіграли однакову кількість партій. Довести, що тоді є або тільки один учасник, який не зіграв жодної партії, або тільки один, який зіграв усі партії.

1.5. Довести, що для довільного $n \geq 3$ існує граф із n вершинами, в якому n-1 вершина мають попарно різні степені, причому ізольованих вершин немає.

1.2.2. Деякі спеціальні види графів

Розглянемо графи з деякими структурними особливостями. *Порожнім* називається граф з порожньою множиною ребер, *тривіальним* — з однією вершиною й без ребер. Протилежними до таких графів є повні. Граф, у якому кожна вершина суміжна з усіма іншими, називається *повним*. Повний граф з n вершинами позначається K_n; кожна його вершина має степінь n-1 (рис. 5). Якщо граф $G = (V, E)$ є повним, то за означенням $E = V^{(2)}$.

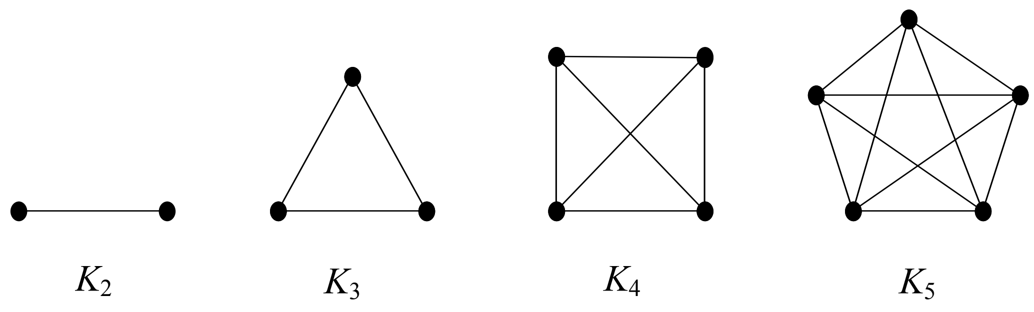


Рис. 5. Приклади повних графів

Граф, усі вершини якого мають степінь r, називається *регулярним* (*однорідним*) степеня r. Регулярні графи степеня 0, 1 та 2 за своїми структурними властивостями є досить простими. Перші цікаві регулярні графи мають степінь 3; вони називаються *кубічними*.

Окремий клас графів утворюють двочасткові графи. Граф $G = (V, E)$ називається *двочастковим*, якщо множину його вершин V можна так розбити на дві підмножини V_1 і V_2 (*частки*), що кожне ребро графа з'єднує вершини з різних часток, тобто $E \subseteq V^{(2)} \backslash (V_1^{(2)} \cup V_2^{(2)})$. Двочастковий граф називається повним двочастковим, якщо будь-які дві вершини з різних часток суміжні. Якщо частки повного двочасткового графа мають n і m вершин відповідно, він позначається $K_{n,m}$. Повний двочастковий граф $K_{1,n}$ називається *зірковим* графом, або зіркою (рис. 6).

Повний двочастковий граф $K_{3,3}$ є моделлю задачі про "три будинки та три колодязі". Три сусіди, що посварилися, спільно користуються трьома колодязями. Чи можна провести доріжки від кожного будинку до кожного колодязя так, щоб доріжки не перетиналися, тобто сусіди не зустрічалися на шляхах до колодязів? Відповідь на це питання буде дано в розділі 5.

Двочасткові графи виникають у багатьох відомих задачах. Наприклад, у задачі про одруження є множина юнаків, і кожен з них знайомий з кількома дівчатами. Питання в тому, чи може кожний юнак одружитися зі знайомою йому дівчиною. Ця задача (звичайно, в іншій формі) відіграє важливу роль при вивченні потоків у мережах.

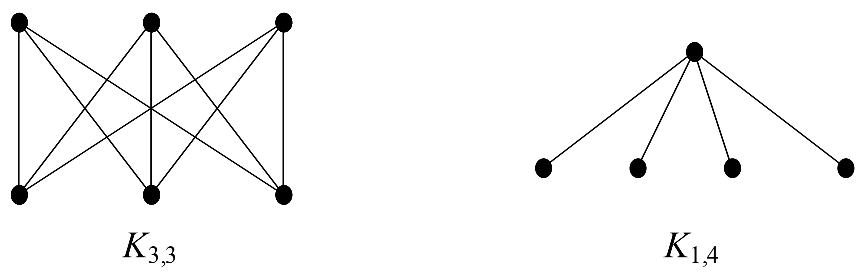


Рис. 6. Приклади повного двочасткового та зіркового графів

Задачі

1.6. Скільки ребер має повний двочастковий граф $K_{n,m}$?

1.7. Чи для кожного натурального k існує повний двочастковий граф з k ребрами?

1.2.3. "Лема про рукостискання"

У довільному графі кожне ребро інцидентне рівно двом вершинам, тому до суми степенів вершин графа кожне ребро додає двійку. Таким чином, справджується твердження, яке було встановлено Ейлером і є історично першою теоремою теорії графів.

Теорема 3. Сума степенів вершин графа $G = (V, E)$ дорівнює подвоєній кількості його ребер: $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$.

Цю теорему інколи називають "лемою про рукостискання". Вершини графа подають людей, а ребра — рукостискання, якими люди обмінялися при зустрічі. Оскільки кожне рукостискання має дві діючи особи, число потиснутих рук удвічі більше кількості рукостискань. Але число потиснутих рук — це сума степенів вершин графа, а кількість рукостискань — це кількість ребер.

Висновок 3.1. Повний граф з n вершинами має $n(n\text{-}1)/2$ ребер.

□ Дійсно, степінь кожної з n вершин дорівнює n-1, тому за теоремою 3 маємо $2|E| = \sum_{v\in V}\delta(v) = n(n\text{-}1)$, звідки кількість ребер дорівнює $n(n\text{-}1)/2$. □

Висновок 3.2. У довільному графі сума степенів вершин парна.

Висновок 3.3. У будь-якому графі кількість вершин, степінь яких непарний, парна.

□ Нехай дано граф $G = (V, E)$. Множину вершин графа V можна розбити на дві підмножини, що не перетинаються: множина вершин парного степеня $V_п$ та множина вершин непарного степеня $V_н$; $V_п \cup V_н = V$, $V_п \cap V_н = \varnothing$. Тоді $2|E| = \sum_{v\in V}\delta(v) = \sum_{v\in V_н}\delta(v) + \sum_{v\in V_п}\delta(v)$, звідки $\sum_{v\in V_н}\delta(v) = 2|E| - \sum_{v\in V_п}\delta(v)$. Сума степенів вершин з множини $V_п$ завжди парна, оскільки її складають вершини парного степеня. Тоді сума степенів вершин з непарними степенями парна як різниця двох парних чисел. Але якщо сума непарних чисел є парною, то вона має парну кількість доданків, тобто кількість вершин непарного степеня парна. □

Задача. При яких натуральних n і m існує кубічний граф з n вершинами і m ребрами?

□ Для існування вершин степеня 3 граф повинен мати принаймні 4 вершини, тому $n \geq 4$. У кубічному графі кожна вершина має степінь 3 — непарне число. Число вершин непарного степеня повинно бути парним, тому n парне, $n = 2k$ при деякому натуральному k. Обчислимо кількість ребер. За теоремою 3 маємо $2m = 3n$, звідки $m = 3k$. Таким чином, необхідними умовами існування кубічного графа з n вершинами та m ребрами є $n = 2k$ та $m = 3k$ при деякому натуральному $k \geq 2$.

Увага! Щоб стверджувати, що при $n = 2k$ та $m = 3k$ ($k\in N$, $k \geq 2$) існує кубічний граф з n вершинами і m ребрами, необхідно довести його існування. Зробимо це.

Розташуємо вершини по колу в кутах правильного $2k$-кутника й проведемо всі ребра між сусідніми вершинами та діаметри, що виходять з вершин. Очевидно, що це можна зробити при $k \geq 2$. При цьому одержимо кубічний граф з $2k$ вершинами та $3k$ ребрами. Цій діаграмі відповідає формальний граф (V, E) з множиною вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2k}\}$ та множиною ребер $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{2k-1}, v_{2k}), (v_{2k}, v_1)\} \cup \{(v_1, v_{k+1}), (v_2, v_{k+2}), \ldots, (v_k, v_{2k})\}$.

Відповідь. Кубічний граф з n вершинами та m ребрами існує тоді й тільки тоді, коли $n = 2k$ і $m = 3k$ при деякому натуральному $k \geq 2$. □

Задачі

1.8. Чи існує повний граф, кількість ребер якого дорівнює:

а) 15; в) 199...900...0 (n дев'яток і n нулів);

б) 18; г) $8k^2+2k$, $k \in N$?

1.9. Нехай у графі G з n вершинами і m ребрами є p вершин степеня t, а решта вершин мають степінь $t+1$. Довести, що $p = (t+1)n-2m$.

1.10. 29 команд проводять футбольний турнір в одне коло. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.

1.11. Чи існує граф із n вершинами, усі вершини якого є кінцевими, якщо:

а) $n = 2k-1$ ($k \in N$); б) $n = 2k$ ($k \in N$)?

1.12. Чи можна з повного графа K_{17} вилучити деякі ребра так, щоб степінь кожної вершини дорівнював:

а) 15; б) 2; в) 1 ?

1.13. У товаристві з n осіб кожен знайомий з k і тільки k іншими особами. Чи можливе таке товариство при:

а) $n = 5$, $k = 2$; в) $n = 2m$, $k = 1$;

б) $n = 5$, $k = 3$; г) $n = 2m$, $k = 3$?

1.14. Чи існує кубічний граф із n вершинами, якщо:

а) $n = 100$; г) $n = 2k-1$;

б) $n = 101$; д) $n = 2k$?

в) $n = 102$;

1.3. Операції над графами

Якщо для двох графів $G = (V, E)$ і $G' = (V', E')$ виконуються включення $V' \subseteq V$ і $E' \subseteq E$, то граф G' називається *підграфом* графа G; це позначається $G' \subseteq G$. Граф G у цьому випадку називається *надграфом* графа G'. Якщо $G' \subseteq G$ і $V' = V$, то G' називається *суграфом* графа G. Якщо $V_0 \subseteq V$, то граф $G(V_0) = (V_0, E \cap V_0^{(2)})$ називається *підграфом* графа G, *визначеним множиною вершин* V_0.

Об'єднанням $G_1 \cup G_2$ графів $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф з множиною вершин $V_1 \cup V_2$ і множиною ребер $E_1 \cup E_2$, $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Об'єднання $G_1 \cup G_2$ називається *прямою сумою* графів G_1 і G_2, якщо множини вершин V_1 і V_2 не перетинаються. Для графів $G_1 = (V, E_1)$ і $G_2 = (V, E_2)$ аналогічно означається їх *перетин* $G_1 \cap G_2 = (V, E_1 \cap E_2)$ та *різниця* $G_1 \backslash G_2 = (V, E_1 \backslash E_2)$.

Для графів означаються дві специфічні операції — *вилучення ребра* та *вилучення вершини*.

Нехай дано граф $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$. Результатом застосування операції вилучення ребра e до графа G є граф $G\text{-}e = (V, E \backslash \{e\})$. Результатом застосування операції вилучення вершини v до графа G є граф $G\text{-}v = (V \backslash \{v\}, E \cap (V \backslash \{v\})^{(2)})$, тобто з G вилучається вершина v та всі інцидентні їй ребра.

Приклад. Якщо $G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{(v_1, v_2,), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\})$, то $G\text{-}(v_1, v_2) = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{(v_1, v_3), (v_2, v_3)\})$, а $G\text{-}v_1 = (\{v_2, v_3\}, \{(v_2, v_3)\})$.

Доповненням графа $G = (V, E)$ називається граф $\overline{G} = (V, V^{(2)} \backslash E)$.

Теорема 4. Доповненням графа $\overline{G}$ є граф G.

□ Нехай $G = (V, E)$, тоді $\overline{G} = (V, V^{(2)} \backslash E)$ і $\overline{\overline{G}} = (V, V^{(2)} \backslash (V^{(2)} \backslash E)) = (V, E) = G$. □

Теорема 5. При довільному графі G об'єднання $G \cup \overline{G}$ є повним графом.

□ Нехай $G = (V, E)$, тоді $\overline{G} = (V, V^{(2)} \backslash E)$ і $G \cup \overline{G} = (V, E \cup (V^{(2)} \backslash E)) = (V, V^{(2)})$. □

Теорема 6. Якщо в графі G з n вершинами степінь вершини дорівнює k, то в доповненні $\overline{G}$ її степінь n-k-1.

□ Якщо в графі $G = (V, E)$ вершина v має степінь k, то у неї є рівно k суміжних вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$, $(v, v_i) \in E$, $1 \le i \le k$. Інші n-k-1 вершин $w_1, w_2, \ldots, w_{n-k-1}$ несуміжні з нею в G, тобто $(v, w_i) \notin E$, $1 \le i \le n$-k-1. Тоді $(v, v_i) \notin V^{(2)} \backslash E$, $1 \le i \le k$, і $(v, w_i) \in V^{(2)} \backslash E$, $1 \le i \le n$-k-1. А це означає, що степінь вершини v у доповненні дорівнює n-k-1. □

Задачі

1.15. Чому дорівнює степінь вершини v у графі $\overline{G}$, якщо в графі G з n вершинами:

а) $\delta(v) = 1$; б) $\delta(v) = n$-1; в) $\delta(v) = 0$?

1.16. Чому дорівнює кількість ребер у графі $\overline{G}$, якщо G має n вершин і k ребер?

1.17. Довести, шо доповнення кубічного графа не є кубічним графом.

1.18. Який вигляд має доповнення графа $K_{n,m}$?

1.19. Скільки вершин із однаковими степенями має граф $\overline{G}$, якщо в G таких тільки 2?

Відповіді та вказівки

1.1. Антирефлексивні. **1.2.** З кожними двома дугами (v, u) і (u, w) такі графи містять дугу (v, w). **1.3.** Зазначене відношення є частковим порядком. Взагалі ж направлений граф може містити дуги (v, u), (u, w) і (w, v), тобто відповідати нетранзитивному відношенню. **1.6.** nm. **1.7.** Для кожного, наприклад $K_{1,k}$. **1.8.** а) Так, K_6. б) Ні. в) Так, K_m при $m = 2 \times 10^n$. г) Так, K_{4k+1}. *Вказівка*. Використати висновок 3.1. **1.9.** *Вказівка*. За теоремою 3 маємо $pt+(n-p)(t+1) = 2m$. **1.10.** *Вказівка*. Мовою теорії графів задача виглядає так: довести, що в будь-якому графі з 29 вершинами знайдеться вершина парного степеня. Врахувати, що 29 — непарне число, і скористатися висновком 3.3. **1.11.** а) Не існує. б) Існує. *Вказівка*. Сума степенів вершин вказаного графа дорівнює n. **Увага**! Висновок 3.2 дає лише необхідну, але не достатню умову існування графа, тому в розв'язку пункту *б* необхідно навести приклад графа. **1.12.** а) Ні. б) Так. в) Ні. **1.13.** а) Так. б) Ні. в) Так. г) Так при $m \ge 2$, ні при $m = 1$. **1.14.** а) Так. б) Ні. в) Так. г) Ні. д) Так при $k \ge 2$, ні при $k = 1$. **1.15.** а) n-2. б) 0. в) n-1. **1.16.** $n(n$-1)/2-k. **1.18.** Якщо $K_{n,m}$ має частки V і W, то $\overline{K_{n,m}}$ — пряма сума графів $(V, V^{(2)})$ і $(W, W^{(2)})$. **1.19.** Також тільки 2 (за теоремою 6).

Розв'язання

1.4. Мовою теорії графів задача перекладається наступним чином. У графі з n ($n > 2$) вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Довести, що є або лише одна вершина степеня 0, або лише одна степеня n-1. Розглянемо всі можливі заперечення цього твердження. Якщо припустити, що немає вершин степеня як 0, так і n-1, то n вершин мають степені від 1 до n-2, тобто серед них є або дві пари вершин, або три вершини з однаковими степенями, що суперечить умові. Отже, вершини степеня 0 або степеня n-1 є. За теоремою 1 одночасно таких бути не може. Якщо є дві вершини степеня 0, то залишається n-2 вершин з попарно різними степенями від 1 до n-3, а це неможливо. Так само неможливо, що за двох вершин степеня n-1 решта n-2 вершин мають попарно різні степені від 2 до n-2.

1.5. Занумеруємо всі вершини. Спочатку проведемо з останньої вершини ребра до всіх інших. Потім з передостанньої додамо ребра до всіх вершин, окрім першої. З вершини, що передує передостанній, проведемо ребра до всіх вершин, крім першої та другої, і так далі, поки можна проводити ребра. Діаграму для 7 вершин наведено на рис. 7.

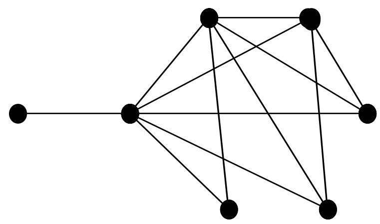


Рис. 7. Граф, у якому тільки дві вершини мають однакові степені

Якщо $n = 2k$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2k}\}$, покладемо $E = \{(v_i, v_j) \mid i+j \geq 2k+1 \wedge 1 \leq i \leq k < j \leq 2k\} \cup \{(v_i, v_j) \mid k+1 \leq i < j \leq 2k\}$.

Нехай $d \in N$, $0 \leq d \leq k$-1. За побудовою графа, $\delta(v_{2k-d}) = 2k-d-1$, $\delta(v_{d+1}) = d+1$. Тоді лише вершини v_{k+1} і v_k мають однакові степені: $\delta(v_{k+1}) = \delta(v_k) = k$.

Якщо $n = 2k+1$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}\}$, покладемо $E = \{(v_i, v_j) \mid i+j \geq 2k+2 \wedge 1 \leq i \leq k+1 < j \leq 2k+1\} \cup \{(v_i, v_j) \mid k+1 \leq i < j \leq 2k+1\}$.

Нехай $d \in N$, $0 \leq d \leq k$-1. За побудовою графа, $\delta(v_{2k+1-d}) = 2k-d$, $\delta(v_{k+1}) = k$, $\delta(v_{d+1}) = d+1$. Знову лише v_{k+1} і v_k мають однакові степені: $\delta(v_{k+1}) = \delta(v_k) = k$.

1.17. Нехай доповнення кубічного графа також є кубічним графом. Тоді з теореми 6 випливає, що граф має 7 вершин. Але кількість вершин кубічного графа повинна бути парною. Суперечність.

Глава 2. Маршрути в графах

2.1. Маршрути, зв'язані вершини, компоненти зв'язності

2.1.1. Маршрути, ланцюги, цикли

Маршрутом у графі $G = (V, E)$ називається послідовність вершин і ребер $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$, де $v_0, \ldots, v_n$ — вершини, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $1 \le i \le n$, — ребра. Ребра e_i та e_{i+1} $(1 \le i \le n-1)$ є *сусідніми* ребрами маршруту й мають принаймні одну спільну вершину. Вказаний маршрут *з'єднує* вершини v_0 і v_n, або *веде* з v_0 у v_n. Цей маршрут можна позначити $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$, не вказуючи ребер. Число n називається *довжиною маршруту*. Для систематичності міркувань вводиться *тривіальний*, або *нуль-маршрут* — маршрут, що складається з єдиної вершини й має довжину 0. Інші маршрути вважаються нетривіальними.

Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра попарно різні, і *простим ланцюгом*, якщо всі його вершини попарно різні.

Якщо $v_0 = v_n$, то маршрут називається *замкненим*, або *циклічним*. Його останнє та перше ребро вважаються сусідніми. Нетривіальний замкнений ланцюг називається *циклом*. Цикл $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ називається *простим*, якщо його вершини $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ попарно різні. Відмітимо, що кожний простий цикл є циклом, а довжина будь-якого нетривіального замкненого маршруту $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$, де $v_0 = v_n$, з попарно різними ребрами не менше 3, оскільки треба вийти з вершини та повернутися в неї, але по різних ребрах. Отже, цикл і простий цикл повинні проходити принаймні через три вершини.

Зауважимо, що за принципом Діріхле довжина довільного простого циклу в графі завжди не більше числа вершин n, а простого ланцюга — менше n.

Якщо $Z_1 = (v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i)$ і $Z_2 = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ — маршрути, то під $Z_1 \cdot Z_2$ будемо розуміти маршрут $(v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, а під Z_1^{-1} — маршрут $(v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1, v_0)$.

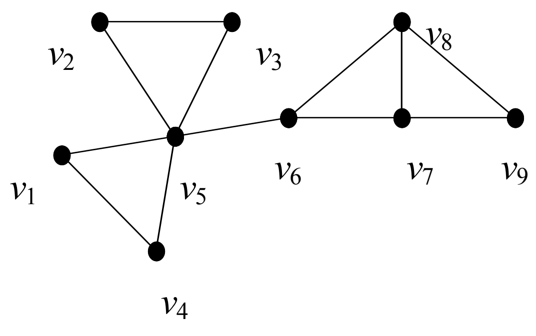


Рис. 8. Приклади маршрутів

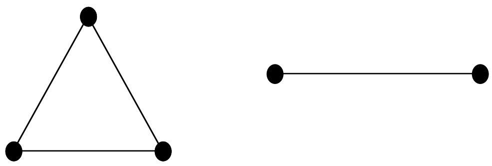
На рис. 8 маршрути (v_1, v_5, v_4, v_1), (v_2, v_3, v_5, v_2) та $(v_6, v_8, v_9, v_7, v_6)$ є простими циклами, $(v_5, v_2, v_3, v_5, v_4, v_1, v_5)$ — циклом, але не простим, $(v_1, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9)$ — простим ланцюгом, $(v_7, v_6, v_8, v_7, v_9)$ — ланцюгом, але не простим, а $(v_8, v_6, v_7, v_8, v_7, v_9)$ не є ланцюгом.

Через C_n позначається граф, утворений одним простим циклом з n вершин, P_n — простим ланцюгом з n вершин. Граф C_3 часто називається *трикутником*. Це цикл і простий цикл з найменшою кількістю вершин.

Граф, що не має циклів, називається *ациклічним*.

Граф, довільні дві вершини якого можуть бути з'єднані деяким маршрутом (є *зв'язаними*), називається *зв'язним*. Інакше граф називається *незв'язним*.

Максимальний за відношенням $\subseteq$ зв'язний підграф графа називається *компонентою зв'язності* (чи *зв'язною компонентою*). На рис. 9 наведено приклад графа з двома компонентами зв'язності K_3 і K_2.



K_3 K_2

Рис. 9. Приклади компонент зв'язності

Відношення зв'язності на множині вершин графа $G = (V, E)$ є еківалентністю; позначимо її R. vRw має місце тоді й тільки тоді, коли вершини v і w є зв'язаними в графі. За еквалентністю R побудуємо фактор-множину $V/R = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, яка є розбиттям множини вершин. Неважко переконатися, що підграфи $G(V_i)$, $1 \le i \le n$, є компонентами зв'язності графа G (максимальними зв'язними підграфами), а сам граф можна подати як пряму суму його зв'язних компонент $G = \bigcup_{i=1}^{n} G(V_i)$. Отже, одержуємо наступну теорему.

Теорема 7. Кожний граф можна однозначно подати як пряму суму зв'язних компонент.

Ця теорема дозволяє зводити більшість задач, пов'язаних із графами, до випадку зв'язних графів.

Питання зв'язності графа виникає у багатьох практичних задачах, наприклад, коли граф подає схему руху транспорту, і треба визначити, чи можна проїхати з одного пункту в інший.

Розглянемо деякі властивості маршрутів.

Теорема 8. Будь-який маршрут, що веде з вершини v у вершину w ($v \ne w$), містить простий ланцюг, що веде з v в w.

□ Нехай є маршрут $Z = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$, де $v_0 = v$, $v_n = w$. Побудуємо за ним простий ланцюг, що веде з v у w. Якщо всі вершини маршруту Z різні, то він є простим ланцюгом. Інакше, нехай $v_i = v_j$ при деяких i та j, $0 \le i < j \le n$. Вилучивши частину маршруту Z між v_i та v_j, одержимо маршрут $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \ldots, e_n, v_n)$, довжина якого менше довжини Z. Умова $v \ne w$ гарантує, що $i \ne 0$ або $j \ne n$, тому новий маршрут з'єднує v і w. Якщо він не є простим ланцюгом, то застосуємо до нього таке саме скорочення. Кількість вершин графа та початковий маршрут Z скінченні, і на кожному кроці зменшується довжина маршруту, тому на деякому скінченному кроці буде одержано маршрут, що з'єднує вершини v та w і має попарно різні вершини, тобто є простим ланцюгом. □

Висновок 8.1. Будь-який найкоротший маршрут, що веде з вершини v у вершину w ($v \neq w$), є простим ланцюгом.

□ З доведення теореми 8 випливає, що, як тільки маршрут веде з вершини v у вершину w і не є простим, його можна скоротити. Отже, він не є найкоротшим. □

У графі може існувати кілька найкоротших простих ланцюгів, що ведуть з вершини v у вершину w ($v \neq w$). Так, у графі, наведеному на рис. 8, є два простих ланцюги найменшої довжини 2, що ведуть з v_6 у v_9 — (v_6, v_7, v_9) та (v_6, v_8, v_9). Але не кожний простий ланцюг з однієї вершини в іншу є найкоротшим маршрутом, що з'єднує ці дві вершини (наприклад, простий ланцюг (v_6, v_7, v_8, v_9) довжини 3).

Висновок 8.2. Довільний цикл містить простий цикл.

□ Нехай дано цикл $Z = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$, де $n \geq 3$. Нехай $v_0 = v_n = v$. Тоді маршрут $(v_1, e_1, \ldots, e_n, v_n)$ не містить ребра (v_1, v_n) і $v_1 \neq v_n$, оскільки $v_0 \neq v_1$. За теоремою 8 він містить простий ланцюг, що веде з v_1 у v_n. Нехай це простий ланцюг $L = (v_1, v_{i2}, \ldots, v_{ik}, v_n)$; за побудовою він не містить ребра $(v_1, v_n) = (v_0, v_1)$. Тоді маршрут $(v_0, v_1, v_{i2}, \ldots, v_{ik}, v_n)$ за означенням є простим циклом й за побудовою міститься в Z. □

Теорема 9. Якщо в графі для деяких трьох різних вершин v, u і w є ланцюги, один з яких веде з v в u, а другий — з u в w, то існує простий ланцюг, що веде з v в w.

□ Нехай існують маршрути $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$ та $(v_n, e_{n+1}, v_{n+1}, \ldots, e_{n+m}, v_{n+m})$, де $v_0 = v$, $v_n = u$, $v_{n+m} = w$. Маршрут $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n, e_{n+1}, v_{n+1}, \ldots, e_{n+m}, v_{n+m})$ є маршрутом, що веде з v в w, причому за умовою $v \neq w$. За теоремою 8 він містить простий ланцюг, що веде з v до w. □

Взагалі ж, якщо в графі існує ланцюг, що веде з вершини v у вершину w і проходить через u, то простого ланцюга між v і w, який проходить через u, може не існувати. Також, якщо в графі є прості ланцюги, що ведуть з v в u та з u в w, то простого ланцюга, що веде з v у w й проходить через u, може не існувати (див. приклад на рис. 10).

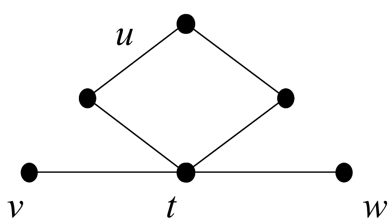


Рис. 10. Ланцюг з v у w через u не є простим

Теорема 10. Якщо в нетривіальному замкненому маршруті всі сусідні ребра різні, то він містить цикл.

□ Нехай дано замкнений маршрут $Z = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n)$, де $v_0 = v_n = v$, з різними сусідніми ребрами. Це означає, що для довільних двох сусідніх ребер e_i та e_{i+1}, $1 \le i < n$, $e_i \ne e_{i+1}$, а також $e_1 \ne e_n$. Якщо всі його ребра попарно різні, то за означенням він є циклом. Інакше в ньому є принаймні два однакових ребра. Серед усіх пар однакових ребер маршруту є пара ребер $e_i = e_j$, $1 \le i < j \le n$, таких, що всі ребра e_{i+1}, …, e_j попарно різні. Але сусідні ребра попарно різні, тому $e_{i+1} \ne e_j$, і маршрут $(v_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, v_{j-1})$ містить принаймні одне ребро.

Нехай $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $e_j = (v_{j-1}, v_j)$. Якщо $v_{i-1} = v_{j-1}$, то $v_i = v_j$. Тоді маршрут $(v_i, e_{i+1}, \ldots, e_j, v_j)$ є нетривіальним замкненим маршрутом з попарно різними ребрами, тобто циклом. Якщо $v_{i-1} = v_j$, то $v_i = v_{j-1}$, і циклом є маршрут $(v_i, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, v_{j-1})$. □

Зауваження 10.1. У доведенні теореми 10 ми фактично побудували розклад маршруту $Z = Z_1{\cdot}Z_0{\cdot}Z_2$ такий, що Z_0 є циклом, а $Z_1{\cdot}Z_2$ — замкненим маршрутом.

Теорема 11. Довільний цикл Z, що не є простим, можна подати у вигляді $Z = Z_1{\cdot}Z_0{\cdot}Z_2$ так, що Z_0 є простим циклом, а $Z_1{\cdot}Z_2$ — циклом.

□ Нехай дано цикл $Z = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$, де $v_0 = v_n = v$. Серед ланцюгів $L_i = (v_0, v_1, \ldots, v_i)$, $1 \le i \le n\text{-}1$, виберемо ланцюг з найбільшим індексом, скажімо, j, що є простим. Очевидно, що L_1 і L_2 є простими ланцюгами, а L_{n-1} — ні, оскільки Z не є простим. Звідси $3 \le j \le n\text{-}2$. L_{j+1} вже не є простим ланцюгом, тому вершина v_{j+1} входить до складу L_j, тобто $v_i = v_j$ при деякому i, $0 \le i < j\text{-}1$. Оскільки ланцюг L_j простий, то цикл $Z_0 = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ також є простим. Вилучивши його з Z, одержимо замкнений нетривіальний маршрут (цикл) $(v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$, у якому покладемо $Z_1 = (v_0, v_1, \ldots, v_i)$ та $Z_2 = (v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$. □

Задачі

2.1. Довести: якщо два різних цикли графа містять ребро e, то в графі є цикл, серед ребер якого немає e.

2.2. Довести, що будь-який замкнений маршрут непарної довжини містить простий цикл. Чи справджується аналогічне твердження для замкнених маршрутів парної довжини?

2.3. Довести, що в графі, степені всіх вершин якого більші 1, є цикл.

2.4. Довести, що в графі, усі прості цикли якого мають парну довжину, немає жодного циклу непарної довжини.

2.5. Довести, що в графі, усі прості цикли якого мають парну довжину, немає жодного замкненого маршруту непарної довжини.

2.6. Довести, що в зв'язному графі будь-які два простих ланцюги максимальної довжини мають принаймні одну спільну вершину. Чи завжди вони мають спільне ребро?

2.7. Довести, що граф є двочастковим тоді й тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.

2.1.2. Якісні ознаки зв'язності

Теорема 12. Нехай G' — це граф, який одержано після вилучення зі зв'язного графа $G = (V, E)$ деякого ребра $e \in E$. Тоді:

а) граф G' зв'язний, якщо ребро e належить циклу в графі G;

б) граф G' незв'язний, і має тільки дві компоненти зв'язності, якщо ребро e не входить у жодний цикл у графі G.

□ а) Нехай ребро e належить циклу $Z = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, де $w_n = w_1$. Без обмеження загальності можна вважати, що $e = (w_1, w_2)$. Через Z' позначимо маршрут $(w_2, \dots, w_n)$. Z є циклом, тому Z' не містить ребра e й є маршрутом в графі G'.

Доведемо, що дві довільні різні вершини v і w графа G' зв'язані. Очевидно, що вони зв'язані в G. Можливі два випадки: маршрут від v до w у G містив ребро e або не містив. Якщо не містив, то маршрут від v до w у G' збігається з маршрутом у G. Якщо маршрут у G містив e, то він мав вигляд $(v, \dots, w_1, w_2, \dots, w)$ чи $(v, \dots, w_2, w_1, \dots, w)$. Замінимо в ньому ребро (w_1, w_2) маршрутом $(Z')^{-1}$ чи Z', відповідно, і одержимо маршрут у G'. Отже, довільні дві вершини графа G' зв'язані, тобто він зв'язний.

б) Припустимо, що ребро $e = (v, w)$, $v \neq w$, не належить жодному циклу графа G, але при його вилученні вершини v та w зв'язані між собою в графі $G' = G\text{-}e$. Тоді в графі G' існує маршрут $M = (v, v_2, \dots, v_n, w)$. Без обмеження загальності можна вважати, що M є простим ланцюгом, який не містить ребра e. Тоді в графі G існує маршрут $M\cdot(v, w)$, який не містить однакових ребер, а тому є циклом, і до того ж містить ребро e. Отримана суперечність доводить хибність припущення. Отже, вершини v та w незв'язані в графі G', тому G' — незв'язний граф.

Доведемо, що він має рівно дві компоненти зв'язності. Розглянемо дві непорожні підмножини $V_1 = \{v\} \cup \{x \mid$ існує маршрут з v в x, що не містить ребра $e\}$ та $V_2 = \{w\} \cup \{x \mid$ існує маршрут з w в x, що не містить ребра $e\}$. Доведемо, що вони утворюють розбиття множини вершин графа G. Оскільки вершини v та w є незв'язними в графі G', то множини V_1 і V_2 не перетинаються.

Доведемо, що кожна вершина графа належить одній з множин V_1 або V_2. Розглянемо довільну вершину u графа G, відмінну від v та w. Оскільки граф G є зв'язним, у ньому є маршрут $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$, де $v_0 = u$, $v_n = v$. Якщо він не містить e, то вершина u належить підмножині V_1. Нехай i, $1 \leq i \leq n$, є таким, що маршрут $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_i, v_i)$ не містить ребра e, і $e_{i+1} = e$. Тоді v_i — це v або w, тобто для вершини u існує маршрут, що не містить ребра e й веде в v або w. Звідси кожна вершина графа належить одній з множин V_1 та V_2, тобто $V_1 \cup V_2 = V$.

В графі G' кожні дві вершини з V_1 зв'язані між собою, як і кожні дві вершини з V_2. У G' вершини v та w незв'язані, тому підграфи $G(V_1)$ та $G(V_2)$ є двома компонентами зв'язності графа G', тобто $G' = G(V_1) \cup G(V_2)$. □

Задачі

2.8. Довести, що граф $G = (V, E)$ є зв'язним тоді й тільки тоді, коли для будь-якого розбиття множини вершин V на дві підмножини V_1 і V_2 існує таке ребро $(v, w) \in E$, що вершина v належить одній з підмножин розбиття, а вершина w — іншій.

2.9. Нехай $G = (V, E)$ — неповний зв'язний граф. Довести, що в G існують три такі вершини u, v та w, що $(u, v) \in E$ і $(v, w) \in E$, проте $(u, w) \notin E$.

2.10. Довести: якщо в графі G тільки дві вершини v і w мають непарні степені, то ці вершини зв'язані в графі G.

2.1.3. Точки зчленування, мости

У розв'язанні практичних задач з графами досить часто застосовуються методи типу "розділяй та володарюй", коли задача розв'язується для окремих частин графа, а потім результати об'єднуються. Розклад графа на окремі структурні частини дозволяє зменшувати розмірність розв'язуваних підзадач і досягати ефективнішого розв'язання всієї задачі.

Найпростіший спосіб розкладу графа — у пряму суму його компонент зв'язності. Проте існують класи зв'язних графів, які можна піддавати структурній декомпозиції, тобто розкладати на компоненти зв'язності в результаті вилучення однієї вершини чи ребра. Виявлення таких вершин та ребер допомагає вивчати структуру зв'язного графа.

Точкою зчленування графа, або *розділовою вершиною* називається вершина, вилучення якої збільшує кількість компонент зв'язності; ребро з такою ж властивістю називається *мостом*. Таким чином, якщо v — точка зчленування зв'язного графа G, то граф G-v незв'язний.

Нероздільним називається нетривіальний зв'язний граф, що не має точок зчленування. *Блок* графа — це його максимальний (за відношенням включення) нероздільний підграф. Нероздільний граф сам є блоком. Так, на рис. 8 вершини v_5, v_6 є точками зчленування, а ребро (v_5, v_6) є мостом.

Теорема 13. Нехай v — вершина зв'язного графа $G = (V, E)$. Наступні твердження еквівалентні:

1) v — точка зчленування графа G;
2) існують вершини u і w, не рівні v, для яких v належить кожному простому ланцюгу, що з'єднує u і w;
3) існує розбиття множини вершин V-$\{v\}$ на такі дві підмножини U і W, що для довільних двох вершин $u \in U$ і $v \in W$ вершина v належить кожному простому ланцюгу, який з'єднує вершини u і w.

Теорема 14. Нехай e — ребро графа $G = (V, E)$. Наступні твердження еквівалентні:

1) e — міст графа G;
2) e не належить жодному простому циклу графа G;

3) в G існують такі вершини v і u, що ребро e належить кожному простому ланцюгу, що веде з v в u;
4) існує розбиття множини вершин V-$\{v\}$ на такі дві підмножини U і W, що для довільних двох вершин $u \in U$ і $v \in W$ ребро e належить кожному простому ланцюгу, який з'єднує вершини u і w.

Теорема 15. Нехай G — зв'язний граф, що має не менше ніж три вершини. Наступні твердження еквівалентні:

1) G — блок;
2) довільні дві вершини графа G належать деякому спільному простому циклу;
3) довільна вершина і довільне ребро графа G належать деякому спільному простому циклу;
4) довільні два ребра графа G належать деякому спільному простому циклу;
5) для довільних двох вершин і довільного ребра графа G існує простий ланцюг, що з'єднує ці вершини і містить дане ребро;
6) для довільних трьох різних вершин графа G існує простий ланцюг, що з'єднує дві з них і проходить через третю;
7) для довільних трьох різних вершин графа G існує простий ланцюг, що з'єднує дві з них і не проходить через третю.

Задачі

2.11. Довести теореми 13, 14, 15.

2.1.4. Кількісні ознаки зв'язності

Теорема 16. В довільному графі з n вершинами, k компонентами зв'язності і кількістю ребер m задовольняються нерівності $n-k \le m \le (n-k)(n-k+1)/2$, причому ці оцінки є досяжними.

□ Нижню оцінку $m \ge n$-k доведемо індукцією за кількістю ребер у графі G.

Якщо $m = 0$, то $n = k$, n-$k = 0$ і $m \ge n$-k, тобто нерівність виконується.

Припустимо, що для всіх графів з кількістю ребер $m \le t$ ($t \ge 0$) нерівність $m \ge n$-k виконується. Розглянемо граф G з n вершинами, k компонентами зв'язності, у якому t+1 ребро. Вилучимо з графа G довільне ребро. Згідно з теоремою 12 одержимо граф G', у якому k чи k+1 компонента зв'язності. За припущенням індукції, у цих випадках $t \ge n$-k та $t \ge n$-$(k+1)$, звідки $t+1 \ge n-(k+1)+1 = n-k$. Отже, нерівність для графа G також виконується, і за принципом індукції твердження доведено. Нижня оцінка досягається, наприклад, на будь-якому графі, що є прямою сумою k простих ланцюгів.

Доведемо верхню оцінку $m \le (n-k)(n-k+1)/2$. Розглянемо довільний граф G, що має n вершин, k компонент зв'язності та максимально можливу кількість ребер m. Тоді всі його зв'язні компоненти є повними графами. Нехай у графі є дві повні компоненти зв'язності, що містять t і s вершин, причому $t \ge s \ge 2$. Разом ці дві компоненти мають $(t(t-1)+s(s-1))/2$ ребер. Кількість ребер у двох повних компонентах зв'язності з t+1 та s-1 вершинами дорівнює

$$((t+1)t+(s-1)(s-2))/2 = (t(t-1)+s(s-1))/2+(t-s+1) > (t(t-1)+s(s-1))/2.$$

Звідси найбільша кількість ребер можлива в графі, який має k-1 ізольовану точку (тривіальну компоненту зв'язності) та одну повну (n-k+1)-вершинну компоненту, кількість ребер у якій дорівнює $(n-k)(n-k+1)/2$. □

Висновок 16.1. Якщо в графі з n вершинами кількість ребер більше ніж $(n-1)(n-2)/2$, то граф зв'язний.

□ Якщо граф має k компонент зв'язності та m ребер, то $m \le (n-k)(n-k+1)/2$, звідки $(n-1)(n-2) \le (n-k)(n-k+1)$, що можливо лише при $k = 1$, тобто граф зв'язний. □

Висновок 16.2. Якщо $m < n$-1, то граф з n вершинами та m ребрами незв'язний.

□ Зв'язний граф має одну компоненту зв'язності і за теоремою 16 $m \ge n$-1, що суперечить умові. Тому граф не є зв'язним. □

Висновок 16.3. Якщо граф з n вершинами незв'язний, то кількість його ребер не більше, ніж $(n-1)(n-2)/2$.

□ Це твердження є протилежним до висновку 16.1.□

Задачі

2.12. Нехай у графі з n вершинами степінь кожної вершини не менше $(n-1)/2$. Довести, що граф зв'язний. Чи можна в цьому твердженні замінити $(n-1)/2$ на $[(n-1)/2]$?

2.13. Довести, що при будь-якому $n \ge 2$ існує незв'язний граф, який має n вершин і $(n-1)(n-2)/2$ ребер.

2.14. Довести, що зв'язний граф із n вершинами містить не менше ніж n-1 ребро.

2.15. Визначити для зв'язного двочасткового графа з n вершинами найменшу та найбільшу можливу кількість ребер.

2.16. Довести, що граф G з n вершинами не є двочастковим, якщо кількість його ребер більша від $n^2/4$.

2.2. Екстремальні маршрути — найкоротші ланцюги

2.2.1. Відстань між вершинами

Довжина найкоротшого простого ланцюга, що з'єднує вершини v і w зв'язного графа, називається *відстанню* між вершинами v і w та позначається $d(v, w)$.

Задача пошуку найкоротшого маршруту або відстані між двома вершинами графа виникає дуже часто, коли граф виступає моделлю, наприклад, якоїсь транспортної системи.

Теорема 17. У довільному зв'язному графі $G = (V, E)$ функція відстані $d(v, w)$ задовольняє трьом аксіомам метрики, тобто за будь-яких вершин v, w, $u \in V$ виконується:

1) $d(v, w) \ge 0$; $d(v, w) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $v = w$;

2) $d(v, w) = d(w, v)$;

3) $d(v, w) \le d(v, u)+d(u, w)$.

□ 1. Відстань між вершинами невід'ємна за означенням та дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли між ними існує нуль-маршрут, тобто вони збігаються.

2. Якщо відстань досягається на простому ланцюзі L, що веде з v в w, то L^{-1} буде простим ланцюгом тієї ж самої довжини, що веде з w в v.

3. Якщо $v = w$, то $d(v, u)+d(u, w) \geq 0 = d(v, w)$. Якщо $v \neq w$, і простий ланцюг L_1 довжини $d(v, u)$ веде з v в u, а простий ланцюг L_2 довжини $d(u, w)$ — з u в w, то маршрут $L_1 \cdot L_2$ довжини $d(v, u)+d(u, w)$ веде з v в w. За теоремою 8 він містить простий ланцюг, що з'єднує v та w і має довжину, не більшу ніж довжина $L_1 \cdot L_2$. Звідси за означенням відстані $d(v, u)+d(u, w) \geq d(v, w)$. □

Задачі

2.17. Довести, що вершина u належить найкоротшому простому ланцюгу між вершинами v і w тоді й тільки тоді, коли $d(v, w) = d(v, u)+d(u, w)$.

2.2.2. Ексцентриситет, радіус, діаметр, центр

Ексцентриситетом вершини $v \in V$ зв'язного графа $G = (V, E)$ називається величина $e(v) = max\{d(v, w) \mid w \in V\}$, тобто найбільша з відстаней між v та іншими вершинами графа.

Діаметром зв'язного графа G називається найбільший з усіх ексцентриситетів його вершин і позначається $D(G)$. Жодна відстань в графі не перевищує його діаметр.

Радіусом зв'язного графа G називається найменший з усіх ексцентриситетів його вершин і позначається $R(G)$.

Якщо $e(v) = R(G)$, то вершина v називається *центральною*. *Центром* графа називається множина всіх його центральних вершин.

За означенням $D(G) = max\{e(v) \mid v \in V\} = max\{d(v, w) \mid v,w \in V\}$ і $R(G) = min\{e(v) \mid v \in V\}$.

У графі, наведеному на рис. 8, $e(v_1) = e(v_2) = e(v_3) = e(v_4) = e(v_9) = 4$, $e(v_5) = e(v_7) = e(v_8) = 3$, $e(v_6) = 2$, відповідно діаметр дорівнює 4, радіус — 2, а центр складається з єдиної вершини v_6.

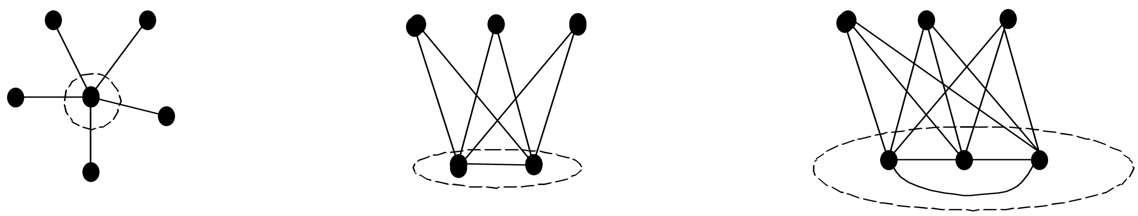
На рис. 11 наведено приклади графів, центр яких складається:

а) з однієї вершини;

б) з двох вершин;

в) з трьох вершин і не збігається з множиною всіх вершин.

Центри обведено пунктирною лінією.



а) б) в)

Рис. 11. Приклади центрів

Теорема 18. Діаметр графа дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли граф повний.

□ (⇒) Якщо діаметр графа дорівнює 1, то відстань між довільними двома різними вершинами не перевищує 1, тобто вони суміжні, і граф повний.

(⇐) Якщо граф повний, то ексцентриситети всіх вершин дорівнюють 1. Тоді й діаметр дорівнює 1. □

У повному графі есцентриситети всіх вершин рівні, тому його центр збігається з множиною всіх вершин. Крім того, $D(K_n) = R(K_n)$ у довільному повному графі K_n. У зірковому графі $K_{1,n}$ при $n \geq 2$ маємо $D(K_{1,n}) = 2$, $R(K_{1,n}) = 1$, тобто $D(K_{1,n}) = 2R(K_{1,n})$.

Теорема 19. Для довільного зв'язного графа G виконується $R(G) \leq D(G) \leq 2R(G)$.

□ Перша нерівність випливає з означень радіуса та діаметра: $R(G) = \mathit{min}\{e(v) \mid v\in V\} \leq \mathit{max}\{e(v) \mid v\in V\} = D(G)$.

Доведемо другу нерівність. Нехай z — центральна вершина. Візьмемо дві довільні вершини v і w. За теоремою 17 $d(v, w) \leq d(v, z)+d(z, w) = 2R(G)$. Тоді $D(G) = \mathit{max}\{d(v, w) \mid v, w\in V\} \leq 2R(G)$. □

Задачі

2.18. Чому дорівнюють діаметр і радіус повного двочасткового графа $K_{n,m}$?

2.19. Скільки центральних вершин має повний двочастковий граф $K_{n,m}$?

2.20. Довести: якщо граф G незв'язний, то граф $\overline{G}$ зв'язний і $D(\overline{G}) \leq 2$.

2.21. Довести, що для будь-якого графа або він сам, або його доповнення є зв'язним графом.

2.22. Нехай для діаметра зв'язного графа G виконується $D(G) \geq 3$. Довести, що граф $\overline{G}$ зв'язний і $D(\overline{G}) \leq 3$.

2.3. Ейлерові графи

Цикл, що містить усі ребра графа, називається *ейлеровим*. Граф називається *ейлеровим*, якщо в ньому є ейлерів цикл. *Ейлеровим ланцюгом* називається ланцюг, що проходить через усі ребра графа.

Наприклад, у графі K_5 з множиною вершин $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ існує ейлерів цикл $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1$.

Ейлерові цикли виникають у практичних задачах, пов'язаних з обходом усіх ребер графа по одному разу. Наприклад, є система шляхів, які треба ремонтувати. Ремонтна бригада має проїхати через усі ці шляхи, починаючи від своєї бази. Бригада має спеціальну техніку, яка рухається дуже повільно, тому бажано двічі тим самим шляхом не проїжджати. Виходить, що найкращим маршрутом бригади буде саме ейлерів цикл, який починається й закінчується в її базі.

Теорема 20. Для зв'язного нетривіального графа G наступні твердження еквівалентні:

(1) G — ейлерів граф (існує цикл, що містить усі ребра графа по одному разу);

(2) кожна вершина графа має парний степінь;

(3) множину ребер графа можна розбити на прості цикли, які не перетинаються по ребрах.

□(1)⇒(2) Нехай у графі G існує ейлерів цикл. Спочатку вилучимо всі ребра, а далі додаватимемо їх по одному у порядку проходження циклу. Якщо в цьому циклі ми приходимо до вершини, то ми повинні вийти з неї (з початкової вершини циклу ми виходимо, а в кінці приходимо до неї). Тому кожне проходження вершини додає 2 до її степеня. Коли додано всі ребра, одержано граф G, кожна вершина якого має парний степінь.

(2)⇒(3) Кожна вершина графа має парний степінь і граф зв'язний (ізольованих вершин немає), тому степінь кожної вершини не менше 2. Тоді методом задачі 2.3 у графі можна знайти простий цикл. Вилучимо ребра цього циклу. Степінь кожної вершини або зменшується на 2, або не зменшується, і в обох випадках залишається парним. Якщо в графі залишаються ребра, продовжуємо процедуру вилучення простих циклів доти, поки існує хоча б одна нетривіальна зв'язна компонента. З описаної процедури очевидно, що граф є сумою вилучених простих циклів, причому ці прості цикли не мають спільних ребер.

(3)⇒(1) Нехай M_1 — один з простих циклів розбиття. З нього почнемо будувати ейлерів цикл. Нехай на деякому кроці побудовано цикл M_k і залишаються прості цикли розбиття, що не увійшли до складу M_k. За зв'язністю графа існує простий цикл Z, який має спільну вершину v з M_k. Зауважимо, що цю спільну вершину можна без обмеження загальності важати початковою вершиною обох маршрутів, тобто $M_k = (v)\cdot M_k'\cdot(v)$ і $Z = (v)\cdot Z'\cdot(v)$. Побудуємо маршрут $M_{k+1} = (v)\cdot M_k'\cdot(v)\cdot Z'\cdot(v)$. Він є циклом, який об'єднує M_k з обраним простим циклом Z. Оскільки граф скінченний, продовження цього процесу на деякому кроці вичерпає всі прості цикли, і побудований цикл міститиме всі ребра графа, тобто граф є ейлеровим.□

Зауважимо, що ця теорема справджується і для мультиграфів.

Висновок 20.1. Нетривіальний зв'язний граф має ейлерів ланцюг тоді й тільки тоді, коли він має тільки дві вершини з непарними степенями.

□ (⇒)Нехай вершини v, w, $v\neq w$, є кінцями ейлерового ланцюга. Додамо до графа нову вершину u та ребра (v, u), (w, u); при цьому зміняться степені лише вершин v та w (збільшаться на 1). В новому графі ці два ребра разом з ейлеровим ланцюгом утворюють ейлерів цикл, і за теоремою 20 усі вершини мають парний степінь. Кінці ейлерового ланцюга у початковому графі мали степені на 1 менше, ніж у новому, тому ці степені були непарними.

(⇐) Якщо граф має рівно дві вершини непарного степеня v, w, $v\neq w$, то додамо до графа нову вершину u та ребра (v, u), (w, u). В отриманому графі всі вершини первинного графа будуть мати парний степінь, додана вершина буде мати степінь 2 — також парний, звідки граф буде ейлеровим, тоді в ньому існує ейлеров цикл. Цей цикл проходить через вершину u рівно один раз, без обмеження загальності можна вважати, що вона є початком та кінцем ейлерового циклу. Тепер вилучимо з графа цю вершину та суміжні з нею ребра. При цьому з ейлерового циклу ми отримаємо ейлеров ланцюг.□

Представимо спосіб побудови ейлерового циклу в ейлеревім графі.

Алгоритм Фльорі.

 Починаючи з довільної вершини u, присвоїмо довільному ребру (u, v) номер 1. Потім викреслимо ребро (u, v) та перейдемо до вершини v. Нехай на попередньому кроці ми перейшли до вершини w і присвоїли ребру номер k. На черговому кроці вибираємо довільне ребро, інцидентне w, причому ребро, що не входить до складу жодного циклу в графі, який залишився, обираємо тільки тоді, коли інших немає; присвоюємо обраному ребру номер k+1 та викреслюємо його.

Теорема 21. Алгоритм Фльорі є коректним.

 Коректність алгоритму Фльорі полягає в тім, що для ейлерового графа алгоритм приводить до побудови ейлерового циклу.

Нехай граф $G = (V, E)$ є ейлеровим. За теоремою 22 степені всіх його вершин парні, тому алгоритм може закінчити роботу тільки в тій вершині, з якої починав працювати. Тоді він будує деякий цикл C з множиною ребер E_C, і треба лише довести, що $E_C = E$. Припустимо, що це не так: нехай G' — нетривіальна зв'язна компонента графа G-E_C. Аналогічно доведенню теореми 20 можна показати, що степені всіх вершин в графі G-E_C парні, оскільки з G вилучено ребра циклу, а тоді множину ребер кожної зв'язної компоненти графа G-E_C можна розбити на прості цикли. Розглянемо множину A ребер циклу C, які були викреслені алгоритмом, коли поточна вершина належала графу G'. Очевидно, що $A \neq \varnothing$ (інакше початковий граф незв'язний). Нехай $a \in A$ — ребро, що одержало найбільший номер в процесі роботи алгоритму (викреслене останнім). Тоді ребро a у момент викреслювання не входило до складу жодного циклу в графі, але кожна вершина графа G' входить до складу деякого простого цикла. А це суперечить правилу вибору наступного ребра. Отже, припущення про існування нетривіальної зв'язної компоненти G' є хибним, тому $E_C = E$.

Задачі

2.23. Які з повних графів K_n є ейлеровими?

2.24. Для яких значень n і m повний двочастковий граф $K_{n,m}$ є ейлеровим?

2.25. Довести, що кожна неізольована вершина ейлерового графа належить деякому простому циклу цього графа.

2.26. Чи існує в графі K_5 цикл довжини 9?

2.27. Довести, що множину ребер зв'язного графа, який має $2k$ вершин ($k \geq 1$) із непарними степенями, можна розбити на k ланцюгів.

2.28. Довести, що у довільному зв'язному графі існує замкнений маршрут, що починається з будь-якої вершини і містить усі ребра графа, причому кожне з них двічі.

2.29. Довести, що якщо в графі існує замкнений маршрут, який містить кожне ребро графа непарну кількість разів, то степені вершин графа парні.

2.30. Дано підмножину кісток доміно, серед яких відсутні дублі. Указати умови, за яких з цих кісток можна скласти єдиний неперервний ланцюжок за правилами гри в доміно. Чи відрізняється відповідь, якщо кістки можуть повторюватися?

2.4. Екстремальні маршрути — максимальні прості ланцюги

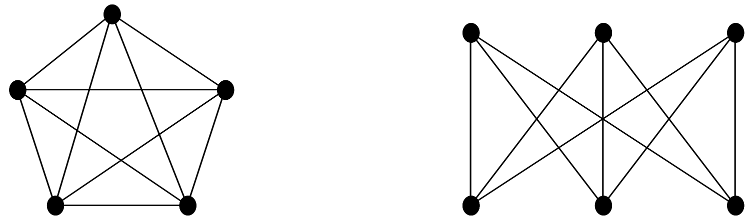
2.4.1. Гамільтонові графи

Ейлерові цикли характеризуються властивістю проходити по одному разу через кожне ребро графа, а гамільтонові цикли — через кожну вершину. *Гамільтоновим* називається простий цикл, який проходить через кожну вершину графа. Граф, у якому є гамільтонів цикл, називається *гамільтоновим*. Простий ланцюг, що проходить через кожну вершину графа, називається *гамільтоновим*.

Уперше задача пошуку простого циклу, що містить усі вершини графа, з’явилася у вигляді головоломки, яку в 1859 році запропонував сер Вільям Гамільтон. Суть її полягала в побудові маршруту, який проходив би по одному разу через кожне з 20 міст та повертався у початкову вершину маршруту.

Задачу про гамільтонові цикли можна інтерпретувати наступним чином. Серед лицарів деякі є друзями. Як їх можна розсадити за круглим столом, щоб по обидва боки кожного з присутніх сиділи його друзі?

До задач про гамільтонові цикли відносять і задачу про комівояжера. Він має відвідати кілька міст, відстані між якими відомі. Необхідно знайти найкоротший маршрут, що проходить через усі міста й повертається в початкове. Ця задача має низку застосувань у дослідженні операцій, наприклад, у зв’язку з ефективним використанням обладнання. Приклади гамільтонових графів наведено на рис. 12.



K_5 $\qquad\qquad$ $K_{3,3}$

Рис. 12. Приклади гамільтонових графів

Очевидно, що в довільному повному графі $K_n = (V, V^{(2)})$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n \geq 3$, існує гамільтонів цикл $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$. Для двочасткового графа $K_{n,n}$ з частками $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $V_2 = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{2n}\}$, $n \geq 2$, також існує гамільтонів цикл $(v_1, v_{n+1}, v_2, v_{n+2}, \ldots, v_{n-1}, v_{2n-1}, v_n, v_{2n}, v_1)$.

Незважаючи на схожість означень ейлерових і гамільтонових циклів, вони мають цілком різні властивості. Зокрема, існують гамільтонові графи, що не є ейлеровими, і навпаки (відповідні приклади наведено на рис. 13). Їх відмінність виявляється також у тім, що задача побудови ейлерового циклу розв’язується дуже просто (див. алгоритм Фльорі), а задача побудови гамільтонова циклу (як і задача комівояжера) належить до так званих *важкорозв’язуваних задач* [6].

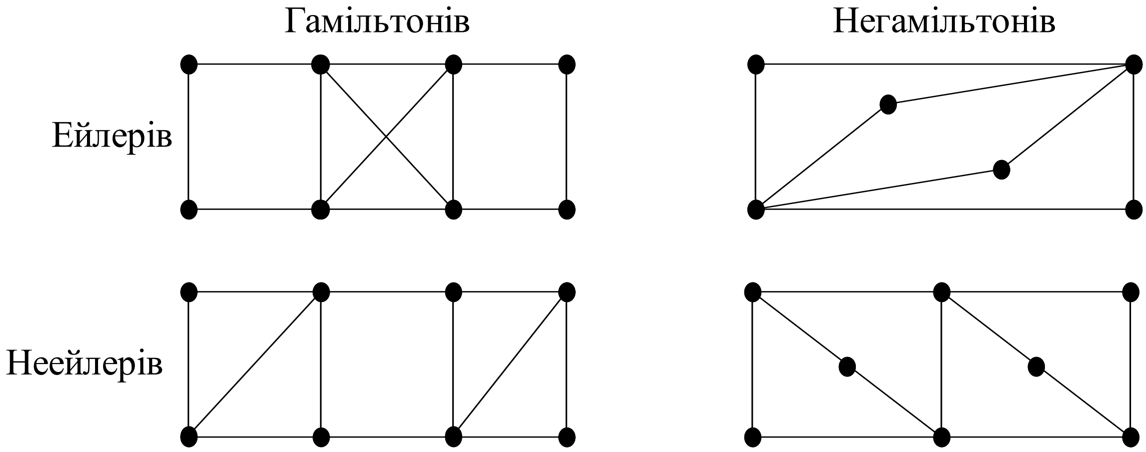


Рис. 13. Ейлерові та гамільтонові графи

Відмітимо, що в гамільтоновому графі всі вершини зв'язані між собою гамільтоновим циклом. Крім того, цей цикл проходить через кожну вершину, тому степені всіх вершин гамільтонового графа не менше 2.

Задачі

2.31. Довести, що граф $K_{n,m}$ не є гамільтоновим, якщо $n \neq m$.

2.32. Довести, що граф, який має дві несуміжні вершини степеня 3, а всі інші вершини степеня не більше 2, не має гамільтонового циклу.

2.4.2. Властивості максимальних простих ланцюгів

У даному параграфі розглядаються достатні умови гамільтоновості графа. Вони пов'язані з поняттям простого ланцюга максимальної довжини. Окрім цього поняття, розглянемо також поняття повного ланцюга та ланцюга, що має тип циклу, потрібні у подальшому.

Простий ланцюг називається *повним*, якщо його не можна продовжити, додаючи ребра до якого-небудь з його кінців і отримуючи при цьому простий ланцюг.

Безпосередньо з означення випливає наступне твердження.

Теорема 23. Кінці повного простого ланцюга не мають суміжних вершин серед вершин, що не входять до складу цього ланцюга.

Висновок 23.1. Степені кінців повного простого ланцюга довжини k не більше k.

Простий ланцюг $L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ у графі $G = (V, E)$ *має тип циклу*, якщо підграф $G_0 = G(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ має гамільтонів цикл. У цьому випадку L є гамільтоновим ланцюгом у графі G_0.

Теорема 24. Повний простий ланцюг $L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ довжини k ($k \geq 2$) має тип циклу в графі $G = (V, E)$, якщо $\delta(v_0)+\delta(v_k) \geq k+1$.

□ Якщо v_0 і v_k суміжні, то в графі $G_0 = G(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ існує гамільтонів цикл $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k, v_0)$. Нехай вершини v_0 і v_k несуміжні. Доведемо, що в G_0 є інший гамільтонів цикл, довівши спочатку, що існує вершина v_i, для якої $(v_0, v_i) \in E$ і $(v_k, v_{i-1}) \in E$.

Припустимо супротивне: для кожної вершини v_i (крім v_1), суміжної з v_0, вершина v_{i-1} несуміжна з v_k. Кількість таких вершин v_i є $\delta(v_0)$-1, а всіх проміжних вершин у ланцюгу L — k-1. Тоді $\delta(v_k) \leq (k\text{-}1)\text{-}(\delta(v_0)\text{-}1) = k\text{-}\delta(v_0)$, тобто $\delta(v_k)+\delta(v_0) \leq k$, що суперечить засновку теореми. Таким чином, існує вершина v_i, для якої $(v_0, v_i) \in E$ і $(v_k, v_{i-1}) \in E$ (рис. 14, *а*). Тоді в графі G_0 є гамільтонів цикл $(v_0, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1, v_0)$. □

Максимальним простим ланцюгом називається простий ланцюг максимальної довжини. Очевидно, що кожний максимальний простий ланцюг є повним, але не навпаки. Наприклад, у графі на рис. 14, *б* не всі повні прості ланцюги є максимальними.

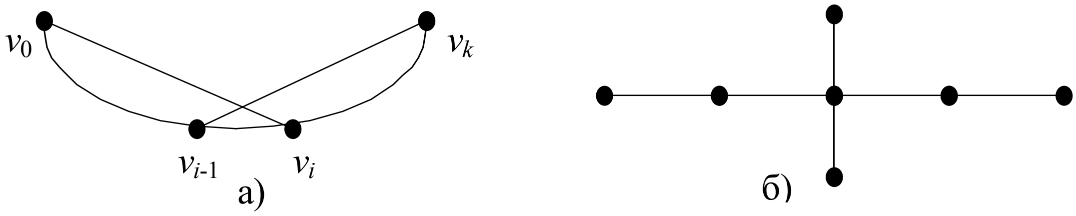


Рис. 14. Гамільтонів цикл та повні прості ланцюги

Теорема 25. Максимальний простий ланцюг має тип циклу у зв'язному графі тоді й тільки тоді, коли граф має гамільтонів цикл.

□ (⇒) Нехай максимальний простий ланцюг $L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ у графі G має тип циклу. За означенням, $G_0 = G(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ є гамільтоновим. Припустимо, що в G є вершини, яких немає в G_0. Оскільки G зв'язний, у ньому є ребро (v_i, w), для якого w не належить G_0. Але тоді в G є простий ланцюг $(w, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i)$, довжина якого більше довжини L. А це неможливо, оскільки L є максимальним.

(⇐) Очевидно, що за гамільтоновим циклом можна побудувати гамільтонів ланцюг, який буде максимальним простим ланцюгом та матиме тип циклу. □

Висновок 25.1. У зв'язному негамільтоновому графі довжина максимального простого ланцюга $L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ не менше $\delta(v_0)+\delta(v_k)$.

Задачі

2.33. Довести, що у зв'язному негамільтоновому графі G, степені всіх вершин якого не менше k ($k \geq 2$), існує простий ланцюг довжини не менше $2k$.

2.34. Довести, що коли в графі G степені всіх вершин не менше k і $k \geq 2$, тоді в G є простий цикл довжини не менше k+1.

2.35. Теорема Оре. Якщо для довільних несуміжних вершин v і w зв'язного графа G з n ($n \geq 3$) вершинами виконується $\delta(v)+\delta(w) \geq n$, то граф G має гамільтонів цикл.

2.36. Якщо для довільних несуміжних вершин v і w зв'язного графа G з n ($n \geq 2$) вершинами виконується $\delta(v)+\delta(w) \geq n$-1, то G має гамільтонів ланцюг.

2.37. Теорема Дирака. Якщо для будь-якої вершини v зв'язного графа G з n ($n \geq 3$) вершинами виконується $\delta(v) \geq n/2$, то граф G має гамільтонів цикл.

Відповіді та вказівки

2.5. Послідовно вилучити з маршруту всі пари однакових сусідніх ребер. Далі організувати процесс скорочення аналогічно задачі 2.4 з використанням зауваження 10.1. **2.10.** За висновком 3.2 сума степенів вершин компоненти зв'язності парна, тому вказані вершини належать тій самій компоненті. **2.13.** Таким є граф з двома компонентами зв'язності — повною та тривіальною. **2.14.** Застосувати теорему 16 при $k = 1$. **2.16.** Використати задачу 2.15. **2.18.** При $n \geq 2$ та $m \geq 2$ всі ексцентриситети дорівнюють 2, тому $D = R = 2$; при $n > m = 1$ — 1 чи 2, звідки $D = 2$, $R = 1$; при $n = m = 1$ — 1, тому $D = R = 1$. **2.19.** Див. вказівку до задачі 2.18. **2.21.** Використати задачу 2.20. **2.23.** Використати теорему 20. *Відповідь*: n непарне та $n > 1$. **2.24.** Використати теорему 20. *Відповідь*: n і m парні. **2.25.** Використати теореми 20 і 11. **2.26.** Ні. **2.27.** Використати метод додавання вершин, представлений у доведенні висновку 20.1. **2.30.** Кістку доміно можна розглядати як ребро графа (мультиграфа), вершини якого визначаються номерами на кістках. Далі залишається перевірити зв'язність та наявність ейлерового ланцюга. **2.31.** У довільному циклі двочасткового графа вершини часток з'являються по черзі, тому, якщо гамільтонів цикл існує, він містить порівну вершин кожної частки. **2.33.** Використати висновок 25.1. **2.37.** Використати теорему Оре.

Розв'язання

2.1. Нехай $e = (v, w)$. Без обмеження загальності можна вважати, що вказані цикли мають вигляд (w, v, Z_1, w) та (w, Z_2, v, w), де Z_1 і Z_2 — різні ланцюги, що не містять ребра e. У замкненому маршруті (v, Z_1, w, Z_2, v) вилучимо всі пари однакових сусідніх ребер (включаючи ті, що утворюються після попередніх вилучень). Оскільки цикли були різні, одержимо нетривіальний замкнений маршрут з різними сусідніми ребрами, який не містить ребра e. За теоремою 10 він містить цикл.

2.2. Перший спосіб. Вилучимо з маршруту непарної довжини всі пари однакових сусідних ребер, поки це можливо. На кожному кроці довжина маршруту зменшується рівно на 2, тому одержимо замкнений маршрут з різними сусідніми ребрами непарної довжини, тобто нетривіальний. За теоремою 10 та висновком 8.2 він містить простий цикл. У той же час, у замкненому маршруті (v, w, v) довжини 2 простих циклів немає, тому для замкнених маршрутів парної довжини твердження хибне.

Другий спосіб. Доведемо за допомогою індукції за непарною довжиною n. *База*: $n = 3$. Маємо маршрут-трикутник, який, очевидно, є простим циклом. *Перехід*. Гіпотеза індукції: при непарному $n \leq 2k\text{-}1$ $(k \geq 2)$ будь-який замкнений маршрут довжини n містить простий цикл. Нехай $n = 2k+1$. Якщо вершини маршруту $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ не повторюються (крім першої та останньої), він є простим циклом. Нехай $v_i = v_j$ при $0 \leq i < j < n$. Тоді з двох замкнених маршрутів $(v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$ та $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$, сумарна довжина яких n, рівно один має непарну довжину і за гіпотезою індукції містить простий цикл. Тому й весь маршрут $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ містить простий цикл. За принципом індукції твердження доведено.

2.3. Побудуємо шуканий цикл. Візьмемо довільну вершину v_0 графа та зробимо її початком маршруту. Вона має не менше двох суміжних вершин. Нехай v_1 — одна з них. Додавши до маршруту ребро (v_0, v_1) та вершину v_1, одержимо простий ланцюг $L_1 = (v_0, v_1)$. Нехай на деякому кроці ми маємо простий ланцюг $L_n = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$. Вершина v_n, крім v_{n-1}, має ще хоча б одну суміжну вершину, скажімо, v_{n+1}, відмінну від v_{n-1}. Для вершини v_{n+1} є такі можливості. 1. $v_{n+1} = v_i$ при деякому i, $0 \le i < n-1$. Тоді маршрут $(v_i, \ldots, v_n, v_{n+1})$ є простим циклом. 2. v_{n+1} не входить до L_n. Тоді додамо v_{n+1} до маршруту, одержуючи простий ланцюг $L_{n+1} = (v_0, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$. Множина вершин графа скінченна, а довжина простого ланцюга менше числа вершин графа, тому на деякому кроці виникає випадок 1, тобто знайдено простий цикл.

2.4. Оскільки всі прості цикли мають парну довжину, залишається довести, що цикл, який не є простим, також має парну довжину. Нехай цикл Z не є простим. За теоремою 11 його можна подати у вигляді $Z = Z_1 \cdot Z_0 \cdot Z_2$, де Z_0 є простим циклом, а $Z_1 \cdot Z_2$ — циклом, причому $Z_1 \cdot Z_2$ коротший за Z. Усі прості цикли мають парну довжину, тому цикли Z і $Z_1 \cdot Z_2$ мають довжини однакової парності. Якщо $Z_1 \cdot Z_2$ не є простим, то знову проведемо його скорочення та одержимо цикл тієї ж парності, що й Z. Довжина Z скінченна, тому на деякому кроці одержимо простий цикл, який за умовою має парну довжину. Звідси парна й довжина Z.

2.6. Припустимо супротивне. Нехай $Z_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1})$ і $Z_2 = (w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1})$ — два простих ланцюги максимальної довжини n, які не мають спільної вершини. Граф зв'язний, тому існує простий ланцюг Z, що з'єднує вершини v_1 і w_1. Нехай v_k — остання вершина ланцюга Z, яка належить Z_1, а w_m — перша, яка належить Z_2. Позначимо через Y_1 той з ланцюгів $(v_1, \ldots, v_k)$ і $(v_{n+1}, \ldots, v_k)$, довжина якого не менше $n/2$. Якщо їх довжини рівні, нехай це буде $(v_1, \ldots, v_k)$. Так само через Y_2 позначимо "довший" з $(w_m, \ldots, w_1)$ і $(w_m, \ldots, w_{n+1})$. Через Y позначимо частину $(v_k, \ldots, w_m)$ ланцюга Z. Очевидно, що довжина Y не менше 1. Тоді ланцюг $Y_1 \cdot Y \cdot Y_2$ є простим і має довжину не менше $n+1$. Ця суперечність свідчить про хибність припущення, звідки ланцюги Z_1 і Z_2 мають хоча б одну спільну вершину.

Прості ланцюги максимальної довжини спільного ребра можуть не мати (рис. 15).

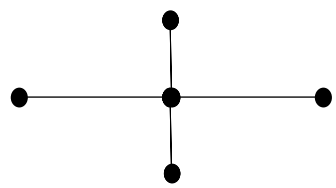


Рис. 15. Приклад до задачі 2.6

2.7. ($\Rightarrow$) Якщо $G = (V, E)$ — двочастковий граф, то множину його вершин V можна розбити на дві підмножини V_1 та V_2 так, що довільне ребро цього графа з'єднує вершину з множини V_1 з деякою вершиною з множини V_2. Тому в кожному простому циклі (v_1, v_2, …, v_n, v_1) вершини, скажімо, з V_1 мають тільки непарні (парні) номери, а вершини з V_2 — парні (відповідно непарні) номери. Звідси довжина n цього циклу парна.

($\Leftarrow$) Кожну компоненту зв'язності графа можна розглядати окремо, тому без обмеження загальності можна вважати граф $G = (V, E)$ зв'язним. Візьмемо довільну вершину v і позначимо через V_1 множину, що складається з v та всіх вершин v_1, найкоротший маршрут з v у v_1 має парну довжину; нехай $V_2 = V \backslash V_1$. Покажемо, що жодне ребро не з'єднує вершини всередині множин V_1 і V_2.

Припустимо, що ребро (u, w) з'єднує дві вершини з множини V_1. Розглянемо найкоротші прості ланцюги $L_u = (u, u_2, …, u_n, v)$ та $L_w = (w, w_2, …, w_m, v)$. Вони мають довжину однакової парності, тому маршрут $L_u \cdot (L_w)^{-1} \cdot (u)$ має непарну довжину і є замкненим, а це суперечить результату задачі 2.5. Аналогічно доводиться, що жодне ребро не з'єднує дві вершини з множини V_2.

Отже, V_1 і V_2 є шуканим розбиттям множини вершин на дві частки, тобто граф є двочастковим.

2.8. ($\Rightarrow$) Візьмемо довільне розбиття множини вершин $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $V_1 \neq \varnothing$, $V_2 \neq \varnothing$, і дві вершини з різних частин розбиття — v з V_1 та w з V_2. Граф зв'язний, тому існує маршрут, що веде з v в w. Оскільки кінці маршруту належать різним множинам розбиття, в ньому є ребро, що з'єднує вершини з різних підмножин.

($\Leftarrow$) Припустимо супротивне. Нехай граф G є незв'язним з компонентами зв'язності $G_1 = (V_1, E_1)$, …, $G_k = (V_k, E_k)$. Розглянемо розбиття множини V на підмножини V_1 та $V_2 \cup … \cup V_k$. Очевидно, що ці підмножини не задовольняють умові задачі, тобто маємо суперечність. Звідси граф є зв'язним.

2.9. Очевидно, що неповний зв'язний граф має не менш як три вершини. Оскільки граф неповний, існують несуміжні вершини. Але граф зв'язний, тому вони з'єднані маршрутом. Якщо довжина маршруту між несуміжними вершинами дорівнює 2, то разом із проміжною вершиною вони утворюють потрібну трійку. Розглянемо найкоротший маршрут (u, v_1, v_2, …, w), що сполучає дві різні несуміжні вершини u та w. Його довжина не менше 2, і в графі немає ребра (u, v_2), тобто u, v_1, v_2 — потрібна трійка вершин.

2.12. Оскільки степінь кожної вершини не менше $(n\text{-}1)/2$, у кожній компоненті зв'язности не менше, ніж $(n\text{-}1)/2+1 = (n+1)/2$ вершин. Припустивши, що граф має не менше двох компонент, одержимо, що загальна кількість вершин у них не менше $2\times(n+1)/2 = n+1$. Але вершин у графі n, тому з цієї суперечності випливає, що компонента зв'язності може бути лише одна.

Замінити $(n\text{-}1)/2$ на $[(n\text{-}1)/2]$ не можна: $n = 1$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $[(n\text{-}1)/2] = 1$, $E = \{(1, 2), (3, 4)\}$.

2.15. За теоремою 16 зв'язний n-вершинний граф повинен мати не менше, ніж n-1 ребро. Серед зв'язних двочасткових n-вершинних графів таким є, наприклад, $K_{1,n\text{-}1}$. Взагалі, для довільного складу $p+q = n$ часток існує зв'язний двочастковий граф $(V_1 \cup V_2, E)$ з n-1 ребром: у нього $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, $V_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$, $E = \{(v_i, u_1) \mid 1 \le i \le p\} \cup \{(v_1, u_i) \mid 2 \le i < q\}$, тобто $|E| = p+q-1 = n-1$.

Очевидно, що найбільша кількість ребер досягається на повному двочастковому графі. Граф $K_{p,q}$ ($n = p+q$) має не більше, ніж pq ребер. Але $pq \le (p+q)^2/4 = n^2/4$, тому ребер у двочастковому n-вершинному графі не більше, ніж $n^2/4$. Рівність досягається при $q = p$ (при парному n). Якщо n непарне, то $pq \le (n^2-1)/4$; рівність досягається при $q = [n/2]$. В обох випадках кількість ребер двочасткового n-вершинного графа не перевищує $[n^2/4]$. Будь-який граф з більшою кількістю ребер двочастковим вже бути не може.

2.17. ($\Rightarrow$) Нехай найкоротший простий ланцюг L, що з'єднує v та w, проходить через вершину u. Нехай з v в u веде простий ланцюг L_1 довжини $d(v, u)$, а з u в w — L_2 довжини $d(u, w)$. L можна подати у вигляді $L = L_3 \cdot (u) \cdot L_4$. Згідно з означенням відстані $|L_3| \ge |L_1|$ і $|L_4| \ge |L_2|$. Тоді $|L| \ge |L_1|+|L_2|$, тобто $d(v, w) \ge d(v, u)+d(u, w)$. Враховуючи теорему 17, одержимо шукану рівність.

($\Leftarrow$) Якщо $d(v, u)+d(u, w) = d(v, w)$ то маршрут, що є з'єднанням двох найкоротших простих ланцюгів, відповідних $d(v, u)$ і $d(u, w)$, не містить однакових вершин (інакше його можна скоротити). Тоді він є простим ланцюгом і має довжину $d(v, w)$, а вершина u належить, таким чином, одному з найкоротших простих ланцюгів між вершинами v і w.

2.20. Нехай граф $G = (V, E)$ має k ($k \ge 2$) компонент зв'язності $(V_1, E_1), \ldots, (V_k, E_k)$. Розглянемо його доповнення $\overline{G} = (V, E_д)$. Візьмемо дві довільні різні вершини v, $w \in V$. Якщо вони належать різним компонентам зв'язності графа G, то $(v, w) \notin E$, звідки $(v, w) \in E_д$ і в графі $\overline{G}$ $d(v, w) = 1$. Нехай v, $w \in V_i$. Візьмемо довільне $j \in \{1, 2, \ldots, k\} \setminus \{i\}$ та довільну вершину $u \in V_j$. Тоді $(v, u) \notin E$ і $(w, u) \notin E$, тобто $(v, u) \in E_д$ і $(w, u) \in E_д$. Тоді в графі $\overline{G}$ є маршрут $(v, (v, u), u, (u, w), w)$, звідки $d(v, w) \le 2$. (Якщо $(v, w) \notin E$, то в $\overline{G}$ насправді $d(v, w) = 1$.) Поєднуючи обидва випадки, маємо, що доповнення незв'язного графа є зв'язним графом діаметра не більше 2.

2.22. Нехай у графі G є вершини v і w, для яких $d(v, w) \ge 3$. Спочатку доведемо зв'язність графа $\overline{G}$. Одразу помітимо, що v і w суміжні в $\overline{G}$. З умови $d(v, w) \ge 3$ випливає, що в G будь-яка вершина несуміжна з v або з w (якщо якась вершина суміжна і з v, і з w, то $d(v, w) \le 2$). Тоді в $\overline{G}$ кожна вершина суміжна з v або з w. Оскільки v і w суміжні в $\overline{G}$, він зв'язний.

Розглянемо дві довільні вершини x і y. Якщо в G вони несуміжні, то $d(x, y) = 1$ в $\overline{G}$, зокрема, $d(v, w) = 1$. Нехай x і y суміжні в G. Кожна з них в G несуміжна з v або з w. Якщо обидві не суміжні з v або обидві несуміжні з w, то $d(x, y) = 2$ в $\overline{G}$. Якщо x несуміжна з v, а y з w (або навпаки), то $d(x, y) \le 3$ в $\overline{G}$. Отже, в графі $\overline{G}$ відстань між будь-якими двома вершинами не більше 3, тому $D(\overline{G}) \le 3$.

2.26. Нехай у K_5 є цикл довжини 9. Вилучимо всі ребра та будемо додавати їх по одному в порядку проходження по ребрах цього циклу. Прийшовши до вершини, ми повинні вийти з неї, тому кожне проходження вершини додає 2 до її степеня.

Коли додано всі 9 ребер, то одержано граф, у якому кожна вершина має парний степінь і число ребер на одне менше, ніж у K_5. Але в K_5 кожна вершина має степінь 4, тому, якщо з нього вилучено одне ребро, то дві вершини мають степінь 3. 3 — непарне число, і одержано суперечність, тому припущення про існування циклу довжини 9 хибне. *Відповідь*. Не існує.

2.28. Якщо граф ейлерів, то існує цикл, який містить усі ребра графа, причому початком циклу можна вважати довільну вершину графа. Залишається пройти цим циклом двічі.

Нехай граф $G = (V, E)$ містить вершини непарного степеня, і V_1 — їх множина. Нехай $G' = (V', E')$ — копія графа G, де $V' = \{v' \mid v \in V\}$, $E' = \{(v', w') \mid (v, w) \in E\}$. Розглянемо граф $H = (V \cup V', E \cup E' \cup \{(v, v') \mid v \in V_1\})$. Він зв'язний. У цьому графі степені всіх вершин парні, тому існує ейлерів цикл. Можна вважати, що цей цикл починається з довільної вершини графа G. Він містить усі ребра графа G та їх копії, що належать G', а також проміжні ребра, що з'єднують вершини G та G'. Тоді, замінивши в ейлеровому циклі всі копії вершин та копії ребер на відповідні оригінали та вилучивши всі проміжні ребра між оригіналом та копією, одержимо замкнений маршрут, який містить кожне ребра графа G двічі.

2.29. Припустимо, що степінь деякої вершини v непарний. Тоді за умовою загальна кількість проходів по інцидентних їй ребрах непарна. Але при кожному проходженні вершини v в замкненому маршруті ми проходимо по двох інцидентних їй ребрах, тому загальна кількість проходів по інцидентних v ребрах парна. Одержано суперечність, яка свідчить про хибність припущення. Звідси всі вершини в графі мають парні степені.

2.32. У гамільтоновому графі всі вершини зв'язані між собою циклом, тому він зв'язний і не має вершин степеня менше 2. Тоді за умовою граф має дві несуміжні вершини степеня 3 та решту вершин степеня 2. Якщо припустити, що в графі є гамільтонів цикл, без обмеження загальності можна вважати, що він починається у вершині степеня 3 одним з трьох інцидентних їй ребер. Цей цикл є простим, тому він закінчується у цій же вершині другим інцидентним їй ребром і не проходить через третє. Але третє ребро сполучає початкову вершину з вершиною степеня 2, яка виявляється відсутньою в циклі. Отже, гамільтонового циклу в графі немає.

2.34. Нехай дано граф $G = (V, E)$ і $(\forall v \in V)(\delta(v) \geq k)$. Розглянемо максимальний простий ланцюг $(v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_n)$. За його максимальністю вершина v_0 не має суміжних вершин серед вершин з множини $V \backslash \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, тобто $O(v_0) \subseteq \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Позначимо $max\{i \mid (v_0, v_i) \in E,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ через m. За умовою степінь кожної вершини не менше k, тому $m \geq k$. Оскільки $(v_0, v_m) \in E$, маршрут $(v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_m, (v_m, v_0), v_0)$ є простим циклом довжини m+1, що не менше k+1.

2.35. Нехай $L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ — один із максимальних простих ланцюгів графа (очевидно, що $k+1 \leq n$). Якщо вершини v_0 і v_k суміжні, то L має тип циклу. Якщо вершини v_0 і v_k несуміжні, то $\delta(v_0)+\delta(v_k) \geq n \geq k+1$ і L має тип циклу за теоремою 24. В обох випадках за теоремою 25 граф є гамільтоновим.

2.36. Нехай $L = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ — один із максимальних простих ланцюгів графа. Якщо вершини v_0 і v_k суміжні, то ланцюг має тип циклу і за теоремою 25 граф має гамільтонів цикл, а тоді й гамільтонів ланцюг. Якщо вершини v_0 і v_k несуміжні, то за висновком 25.1 $k \geq \delta(v_0)+\delta(v_k) \geq n$-1, звідки ланцюг містить усі вершини графа й є гамільтоновим.

Глава 3. Спеціальні види графів

3.1. Дерево, ліс

Ациклічний зв'язний граф називається *деревом*. *Кістяковим деревом* графа називається такий його суграф (підграф, що містить всі вершини графа), що є деревом. Ациклічний граф називається *лісом*. Відповідно, кістяковим лісом графа називається пряма сума кістякових дерев усіх компонент зв'язності графа. Кістяковий ліс зв'язного графа складається з єдиного дерева.

Кістякові дерева з'явилися в роботах Кірхгофа, який у 1847 р. розробив теорію дерев для визначення сили струму в кожному провіднику та кожному контурі електричної схеми. Пізніше, в 1857 р. Келі розглядав дерева як модель насичених вуглеводнів та розв'язав задачі перерахування дерев.

Дерева (головним чином, кореневі орієнтовані з навантаженими вузлами та дугами) широко використовуються в обробці інформації. Досить назвати такі, як пошук та сортування, трансляція, стискання даних та штучний інтелект.

3.1.1. Основні властивості дерев

Теорема 26. Для довільного графа $T = (V, E)$ з n вершинами і m ребрами наступні твердження рівносильні:

1) T — дерево (ациклічний зв'язний граф);

2) T — зв'язний граф і $m = n-1$;

3) T — ациклічний граф і $m = n-1$.

□ (1)⇒(2) За означенням дерева достатньо довести, що $m = n-1$. Зробимо це індукцією за кількістю вершин n. При $n = 1$ та $n = 2$ деревами є K_1 і K_2, в яких $m = n-1$. Нехай твердження виконується для всіх дерев з кількістю вершин не більше t ($t \geq 2$). Розглянемо довільне дерево з t+1 вершиною й вилучимо з нього довільне ребро. Граф ациклічний, тому за теоремою 12 одержимо граф з двома компонентами зв'язності. Кількості вершин t_1 і t_2 у цих компонентах не більше t, тому для них виконується припущення індуції, тобто загальна кількість ребер в одержаному графі дорівнює $(t_1\text{-}1) + (t_2\text{-}1)$, причому $t_1+t_2 = t+1$. З урахуванням вилученого ребра загальна їх кількість у дереві з t+1 вершиною дорівнює $(t_1\text{-}1) + (t_2\text{-}1) + 1 = t$. Отже, за індукцією твердження доведено.

(2)⇒(3) Достатньо довести ациклічність. Припустимо супротивне: зв'язний граф з n-1 ребрами має цикл. Тоді будь-яке ребро, що входить до складу цього циклу, можна вилучити і за теоремою 12 одержати зв'язний граф. У цьому графі залишиться n-2 ребра, а це неможливо за теоремою 16 (зв'язний n-вершинний граф повинен мати принаймні n-1 ребро). Суперечність.

(3)⇒(1) Достатньо довести зв'язність графа. Припустимо супротивне: нехай він має k компонент зв'язності з кількостями вершин $n_1, n_2, \ldots, n_k$; $n_1+n_2+ \ldots +n_k = n$. Граф ациклічний, тому кожна його компонента зв'язності є деревом, і за переходом (1)⇒(2) i-а компонента має n_i-1 ребро. Тоді граф має $(n_1\text{-}1)+(n_2\text{-}1)+ \ldots$

$+(n_i-1) = n-k$ ребер. За умовою кількість ребер дорівнює n-1, тому $k = 1$, тобто граф зв'язний. □

Задачі

3.1. Довести, що граф з $n \geq 2$ вершинами є деревом тоді й тільки тоді, коли для будь-яких різних вершин v і w в ньому існує тільки один простий ланцюг, що веде з v в w.

3.2. Довести, що граф з $n \geq 2$ вершинами є деревом тоді й тільки тоді, коли граф зв'язний і після вилучення будь-якого ребра стає незв'язним.

3.3. Довести, що граф з $n \geq 2$ вершинами є деревом тоді й тільки тоді, коли граф ациклічний, але після проведення ребра між будь-якими двома несуміжними вершинами в графі з'являється рівно один простий цикл.

3.4. Довести, що коли граф з n вершинами має більше ніж $n-1$ ребро, тоді він має принаймні один цикл.

3.5. Довести, що будь-яке дерево є двочастковим графом. Які дерева є повними двочастковими графами?

3.6. Описати всі дерева, доповнення яких також є деревами.

3.7. Довести, що ліс, який має n вершин і складається з k дерев, містить $n-k$ ребер.

3.1.2. Кінцеві вершини в деревах

Задачі даного параграфа демонструють, що можлива кількість кінцевих вершин у деревах має обмеження, пов'язані з максимальним степенем внутрішніх вершин.

Задачі

3.8. Довести, що будь-яке дерево з n вершинами ($n \geq 2$) має не менше двох кінцевих вершин.

3.9. Довести, що будь-яке дерево з n вершинами ($n \geq 2$), у якому є хоча б одна вершина степеня s, має не менше s кінцевих вершин.

3.10. Довести, що в дереві з n вершинами ($n \geq 3$), в якому найбільший степінь вершини дорівнює s, кількість кінцевих вершин не більше $(n(s-2)+2)/(s-1)$.

3.11. Довести, що кількість кінцевих вершин у дереві з n ($n \geq 2$) вершинами, серед яких немає вершин степеня 2, не менше $n/2+1$.

3.12. Довести, що зв'язний граф з n вершинами ($n \geq 3$), кількість кінцевих вершин якого збігається з кількістю ребер, є деревом.

3.1.3. Центральні вершини в деревах

Центральні вершини графів за означенням мають найменший ексцентриситет, тобто максимальну з відстаней від інших вершин. Кажучи неформально, до окраїни від центра завжди ближче, ніж від протилежної окраїни. Таким чином, виникає задача визначення центра графа і, зокрема, центра дерева. Розглянемо на неформальному рівні один досить ефективний алгоритм визначення центра дерева.

З дерева одночасно вилучаються всі його кінцеві вершини. Оскільки при цьому не порушується зв'язність і не з'являються цикли, граф залишається деревом. При цьому відстань між найбільш віддаленими вершинами зменшується на 2, тобто парність діаметра не змінюється. Далі ця операція повторюється доти, поки не залишиться одна вершина (якщо діаметр початкового дерева парний) або дві суміжні (якщо непарний). Це й є центр.

У даному параграфі доводяться твердження, які обгрунтовують наведений алгоритм і уточнюють властивості дерев. Спочатку доведемо два допоміжних твердження.

Лема 1. Ексцентриситет вершини дерева досягається на кінцевій вершині.

□ Нехай вершина u має ексцентриситет $e(u)$. Якщо вершина v, для якої $d(u, v) = e(u)$, не кінцева, то простий ланцюг з u в v можна продовжити принаймні на 1.□

Лема 2. Нехай $D(T_1) \geq 2$, з T_1 вилучено всі кінцеві вершини й одержано дерево T_2. Тоді:

а) ексцентриситет довільної вершини в T_2 на 1 менше, ніж у T_1;

б) центри дерев збігаються;

в) $R(T_2) = R(T_1)$-1;

г) якщо $L = (v_1, v, \ldots, w, w_1)$ є максимальним ланцюгом у T_1, то $L_2 = (v, \ldots, w)$ — максимальний ланцюг у T_2;

д) $D(T_2) = D(T_1)$-2.

□ а) Нехай u — довільна вершина. Якщо $L = (u, \ldots, v_2, v)$ — простий ланцюг у T_1, на якому досягається відстань $e_{T1}(u)$, то ексцентриситет вершини u в T_2 не менше $d_{T2}(u,v_2) = e_{T1}(u)$-1.

Нехай $L = (u, \ldots, v)$ — простий ланцюг у T_2, на якому досягається відстань $e_{T2}(u)$. За лемою 1 вершина v є кінцевою в T_2. Тоді вона не кінцева в T_1, і в T_1 існує ребро (v, w), де w — кінцева вершина в T_1, яка не належить L. Отже, ексцентриситет вершини в T_1 більше ніж в T_2. Поєднуючи оцінки, маємо $e_{T2}(u) = e_{T1}(u)$-1.

б) Ексцентриситет кожної вершини в T_2 рівно на 1 менше, ніж у T_1, тому кожна вершина з найменшим ексцентриситетом у T_2, тобто центральна, є центральною й у T_1. З іншого боку, за лемою 1 та з урахуванням того, що $D(T_1) \geq 2$, усі центральні вершини T_1 не є кінцевими, тому є центральними й у T_2.

в) З а) за означенням радіуса маємо $R(T_2) = R(T_1)$-1.

г) Кожний повний ланцюг у дереві T_1 починається й закінчується в кінцевих вершинах. При їх вилученні довжина ланцюга зменшується на 2, тому найбільша довжина буде в ланцюгів дерева T_2, що є "залишками" максимальних у T_1. Звідси ланцюг $L_2 = (v, \ldots, w)$ є максимальним у T_2, оскільки на 2 коротший за L.

д) Оскільки в дереві діаметр дорівнює довжині максимального ланцюга, з г) маємо $D(T_2) = D(T_1)$-2. □

Наступне твердження обгрунтовує правильність наведеного вище алгоритму визначення центра дерева.

Теорема 27. У довільному дереві T центр складається з однієї вершини, якщо $D(T)$ — парне число, і з двох суміжних вершин, якщо непарне.

 Послідовність застосувань операції вилучення кінцевих вершин породжує послідовність дерев, які згідно з лемою 2 мають однакові центри та діаметри тієї самої парності. Кожне застосування зменшує діаметр на 2, тому послідовність скінченна. Якщо діаметр дерева T парний, залишиться дерево, діаметр якого 0, інакше — 1. У першому випадку це дерево складається з єдиної вершини, і вона є центром T. У другому — з двох вершин, які є центром T.

Задачі

3.13. Радіус $R(T)$ і діаметр $D(T)$ довільного дерева T пов'язані рівністю $R(T) = [(D(T)+1)/2]$;

3.14. Центр дерева належить кожному простому ланцюгу максимальної довжини.

3.15. Довести, що в дереві з непарним діаметром будь-які два простих ланцюги максимальної довжини мають принаймні одне спільне ребро.

3.2. Кістякові дерева й ліси

Щоб отримати кістякове дерево зв'язного графа $G = (V, E)$, можна послідовно вилучати з нього ребра, що входять до складу хоча б одного циклу. За теоремою 12 кожного разу одержується зв'язний граф. Граф скінченний, тому на деякому кроці залишиться ациклічний зв'язний граф, який буде кістяковим деревом графа. При цьому ми вилучимо $|E|-|V|+1$ ребер. Зауважимо, що ребро зв'язного графа, інцидентне кінцевій вершині, входить в усі зв'язні суграфи графа, оскільки вилучення такого ребра робить відповідну вершину ізольованою.

Для побудови кістякового ліса для незв'язного графа слід побудувати кістякове дерево для кожної його компоненти зв'язності. Ця операція потребує вилучення $|E|-|V|+k$ ребер, де k — кількість компонент зв'язності графа.

З наведеного алгоритму випливає наступне твердження.

Теорема 28. Зв'язний граф має кістякове дерево.

Задачі

3.16. Довести, що діаметр дерева T з $n+1$ вершиною ($n \geq 2$) дорівнює 2 тоді й тільки тоді, коли $T = K_{1,n}$.

3.2.1. Цикломатичне число графа

Нехай граф $G = (V, E)$ має k компонент зв'язності. Кількість $\nu(G) = |E|-|V|+k$ ребер, які необхідно вилучити з графа для одержання його кістякового лісу, називається *цикломатичним числом* графа G. У довільному графі G воно дорівнює сумі цикломатичних чисел його зв'язних компонент, які за теоремою 16 невід'ємні. Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 29. Граф G є лісом тоді й тільки тоді, коли $\nu(G) = 0$.

Задачі

3.17. Довести, що для довільного графа $G = (V,E)$ з k компонентами зв'язності виконується рівність

$$\sum_{v\in V}(\frac{\delta(v)}{2}-1)=\nu(G)-k\,.$$

3.18. Нехай $\nu(G)$ — цикломатичне число графа G. Довести, що:

а) $\nu(G) = 1$ тоді й тільки тоді, коли граф G має лише один простий цикл;

б) $\nu(G) = 1$ тоді й тільки тоді, коли в графі G є ребро, після вилучення якого одержується ліс і при цьому кількість компонент зв'язності графа не змінюється.

3.19. Кількість циклів у графі G не менше $\nu(G)$.

3.2.2. Побудова кістяків

У даному параграфі розглядаються переходи між різними кістяковими деревами того самого зв'язного графа та побудова кістякового дерева з найменшим радіусом. Спочатку розглянемо твердження, які обгрунтовують можливість указаних переходів.

Теорема 30. Будь-який ациклічний підграф довільного графа G є підграфом деякого кістякового лісу графа G.

□ Відмітимо всі ребра, що складають ациклічний підграф. Якщо в графі є цикли, то будь-який простий цикл складається не лише з відмічених ребер. Будемо послідовно вилучати невідмічені ребра, що входять у прості цикли. Це не збільшує кількості зв'язних компонент. Зрештою буде одержано кістяковий ліс, що містить даний ациклічний підграф. □

Теорема 31. Нехай $T_1 = (V, E_1)$ і $T_2 = (V, E_2)$ — кістякові дерева зв'язного графа $G = (V, E)$. Для будь-якого ребра $e\in E_1$ дерева T_1 існує ребро $g\in E_2$ дерева T_2 таке, що граф $T = (V, (E_1\backslash\{e\})\cup\{g\})$ також є кістяковим деревом графа G.

□ Якщо ребро e належить обом деревам, покладемо $g = e$, тоді $T = (V, (E_1\backslash\{e\})\cup\{g\}) = (V, E_1) = T_1$.

Нехай $e\notin E_2$. Множина ребер $E_1\backslash\{e\}$ є кістяковим лісом; відмітимо ребра цієї множини й додамо до неї множину ребер E_2. Одержаний граф G_1 зв'язний, оскільки містить кістякове дерево T_2 графа G. Він є підграфом графа G, тому кожне його кістякове дерево є кістяковим деревом графа G. Множина відмічених ребер утворює ациклічний підграф у графі G_1, тому аналогічно теоремі **30** для G_1 існує кістякове дерево, що містить відмічений ациклічний підграф. Це кістякове дерево складається з $|V|$-2 відмічених ребер множини $E_1\backslash\{e\}$ і ще одного ребра, яке необхідно належить множині E_2, що й треба було довести. □

Теорема 32. Для довільного зв'язного графа G існує кістякове дерево T, у якому $R(T) = R(G)$, $D(T) \le 2R(G) \le 2D(G)$.

□ Очевидно, що радіус кістяка не менше радіуса графа. Побудуємо кістяк, на якому досягається рівність. Для цього нам знадобиться низка означень.

Простий ланцюг, що веде з вершини v в w, називається *мінімальним*, якщо його довжина дорівнює $d(v, w)$. Якщо для деяких двох різних ланцюгів Z та Y множина їх спільних вершин збігається з множиною вершин ланцюга Z, то кажуть, що ланцюг Z *включається в* Y.

Нехай граф має радіус R. Розглянемо два мінімальних ланцюги, що ведуть з вершин v й w у центральну вершину u ($v \neq w$, $v \neq u$, $w \neq u$). Нехай це ланцюги ($v = v_1$, v_2, …, v_n, $v_{n+1} = u$), де $n = d(v, u) \leq R$, та ($w = w_1$, w_2, …, w_m, $w_{m+1} = u$), де $m = d(v, u) \leq R$. *Точками збігу* цих простих ланцюгів зі спільним кінцем u називаються вершини v_i та w_j ($v_i \neq u$, $w_j \neq u$), що належать обом ланцюгам, причому частини ланцюгів після цих вершин уже не відрізняються, тобто $v_i = w_j$, $n\text{-}i = m\text{-}j$, $v_{i+d} = w_{j+d}$ при $d \in \{0, 1, \ldots, n\text{-}i{+}1\}$. *Точками перетину* цих простих ланцюгів зі спільним кінцем u називаються вершини, відмінні від u, що належать обом ланцюгам і не є точками збігу.

Ми розглядаємо мінімальні ланцюги, тому їх частини від точок перетину до вершини u також є мінімальними ланцюгами.

Нехай є множина L мінімальних ланцюгів, що ведуть в вершину u, причому жодні два з них не мають точок перетину (але можуть мати точки збігу). Для довільного мінімального ланцюга, що веде в u й не належить L, визначимо *множину точок збігу з* L як найбільшу з множин точок збігу з ланцюгами з L, а також *множину точок перетину з ланцюгами з* L як об'єднання точок перетину даного ланцюга з кожним ланцюгом з L.

Означимо *операцію додавання ланцюга* Z_0 *до* L.

- Якщо Z_0 не має точок перетину з L, додамо його до L.
- Якщо $Z_0 = (w = w_1, w_2, \ldots, w_m, w_{m+1} = u)$, де $m = d(w, u) \leq R$, перетинається з L у k точках, то розглянемо точку перетину, що має найменший індекс у Z_0, тобто першу точку перетину; нехай це точка $v_i = w_j$, що належить деякому ланцюгу Z з L, $Z = (v = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1} = u)$, $n = d(v, u) \leq R$. Додамо до L ланцюг $Z_1 = (w = w_1, w_2, \ldots, w_j = v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{n+1} = u)$, якщо він не включається в жоден ланцюг з L. За побудовою він не перетинається з жодним ланцюгом з множини L і є мінімальним ланцюгом. Ланцюг $Z_2 = (w_{j+1}, \ldots, w_m, w_{m+1} = u)$ — частина Z_0 від точки першої перетину до вершини u — також є мінімальним. Кількість точок перетину Z_2 з отриманою множиною L дорівнює k-1, що строго менше, ніж було в Z_0. Застосуємо операцію додавання до Z_2 рекурсивним чином. Отже, за скінченну кількість кроків до L можна додати такі прості ланцюги, що всі вершини ланцюга Z_0 будуть присутні серед вершин ланцюгів з множини L.

Нарешті, розглянемо *алгоритм побудови кістякового дерева з найменшим радіусом*. Для кожної вершини графа, окрім центральної вершини u, побудуємо один мінімальний ланцюг, що веде з неї в u, і сформуємо з цих ланцюгів множину LL. Довжини всіх цих ланцюгів не більше радіуса графа. Вилучимо з LL усі ланцюги, що включаються в інші ланцюги з LL. Множина L на початку роботи алгоритма порожня. Виберемо з LL один із ланцюгів найбільшої довжини та перемістимо його в множину L.

Далі на кожному кроці обираємо довільний ланцюг з LL та описаним вище алгоритмом додаємо до L так, щоб кожна вершина обраного ланцюга була присутня в деякому ланцюзі з L. Вилучаємо оброблений ланцюг з LL. Щоразу в ланцюгів множини L немає точок перетину, а їх довжини не більше радіуса графа (оскільки вони є мінімальними ланцюгами до центральної вершини u). Коли множина LL стане порожньою, L буде містити прості ланцюги, які не мають точок перетину й накривають усі вершини графа.

Об'єднання ланцюгів з L утворює дерево T. За побудовою, як тільки два ланцюги мають спільну точку, вони збігаються від неї до вершини u. Отже, об'єднання ланцюгів з L є ациклічним зв'язним підграфом, що містить усі вершини графа. Відстань у дереві T від кожної вершини графа до вершини u не більше $R(G)$, оскільки відповідає мінімальному ланцюгу. Звідси $R(T) = R(G)$ і $D(T) \le 2R(G) \le 2D(G)$. □

Задачі

3.20. Довести, що будь-яке ребро зв'язного графа G є ребром деякого кістякового дерева графа G.

3.21. Довести, що довільне кістякове дерево T_1 графа G можна перетворити в будь-яке інше кістякове дерево T_2 графа G, послідовно замінюючи одне ребро з T_1 на ребро з T_2 так, що на кожному кроці отримуємо кістякове дерево графа G.

3.22. Для довільного k (k>2) побудувати граф, діаметр якого дорівнює k, а будь-яке його кістякове дерево має діаметр $2k$.

Відповіді та вказівки

3.4. У графі знайдеться компонента зв'язності, що має ребер не менше ніж вершин, але за теоремою 26 в дереві ребер рівно на одиницю менше ніж вершин. **3.5.** Використати задачу 2.7. Граф $K_{n,m}$ має $n\cdot m$ ребер; якщо він є деревом, то за теоремою 26 $m\cdot n = m+n-1$. Звідси $m = 1$ або $n = 1$. **3.6.** Використати те, що дерево з n вершинами та його доповнення мають по n-1 ребер, а також задачу 1.16. 3.6. K_1 та P_4. **3.10.** Припустивши, що в дереві є m кінцевих вершин, аналогічно задачі 3.9 одержати $2(n-1) \le m+(n-m)s$. **3.11.** Використати метод задачі 3.9. **3.14.** Застосувати індукцію за діаметром дерева. **3.15.** Застосувати індукцію за діаметром дерева або результат задачі 3.14. **3.17.** Використати означення цикломатичного числа $\nu(G)$ як $|E|-|V|+k$. **3.20.** Використати метод теореми 30. **3.21.** Див. теорему 31. **3.22.** C_{2k+1}.

Розв'язання

3.1. ($\Rightarrow$) Нехай для вершин v і w існують два різних простих ланцюги, що ведуть з v в w $L_1 = (v, \ldots, w)$, $L_2 = (v, \ldots, w)$, $L_1 \ne L_2$. Тоді в графі існує замкнений маршрут $L_1\cdot(L_2)^{-1}$. Вилучимо з нього всі пари сусідніх рівних ребер. Ланцюги були різні, тому одержимо замкнений маршрут, в якому всі сусідні ребра різні. Тоді за теоремою 10 в графі є цикл. Суперечність.

($\Leftarrow$) Оскільки будь-які дві різні вершини зв'язані простим ланцюгом, граф зв'язний. Доведемо його ациклічність. Припустимо супротивне: в графі є цикл. Тоді є й простий цикл, і для будь-яких двох різних вершин цього цикла є два різних простих ланцюги, що їх зв'язують. Суперечність. Отже, граф ациклічний, а тому є деревом.

3.2. (⇒) Якщо граф є деревом, то за теоремою 26 він має n-1 ребро. Після вилучення ребра одержимо граф з n вершинами та n-2 ребрами, незв'язний за висновком 16.2.

(⇐) Ациклічність випливає з теореми 12, оскільки за нею жодне ребро графа не належить циклу.

3.3. (⇒) Граф зв'язний, тому будь-які дві його різні несуміжні вершини v та w з'єднані простим ланцюгом $L = (v, \ldots, w)$. Після проведення ребра $e = (v, w)$ отримуємо граф, у якому маршрут $L\cdot(w,v)$ є циклом. Покажемо, що цей цикл єдиний. Якщо існує інший цикл, він повинен містити ребро e, оскільки перед додаванням ребра граф був ациклічним. Таким чином, цей цикл має вигляд $L_1\cdot(w, v)$, де $L_1 = (v, \ldots, w)$ — простий ланцюг. Але за задачею 3.1 ланцюги L та L_1 однакові, тому цикли збігаються.

(⇒) Достатньо довести зв'язність графа. Якщо він незв'язний, то з'єднаємо дві його зв'язні компоненти ребром e. Одержимо граф з меншою кількістю компонент зв'язності. Граф був ациклічний, тому цикл містить додане ребро, а тоді за теоремою 12 після вилучення ребра e кількість компонент зв'язності не зміниться, що є суперечністю. Отже, граф зв'язний.

3.7. Нехай ліс має k компонент зв'язності з кількостями вершин $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ($\sum_{i=1}^{k} n_i = n$). Застосувавши теорему 26 для кожного дерева, одержимо, що граф має $\sum_{i=1}^{k} (n_i\text{-}1) = n\text{-}k$ ребер.

3.8. Якщо в дереві не менше ніж 2 вершини, то за означенням у ньому немає вершин степеня 0. Якщо в графі немає кінцевих вершин або вона одна, то не менше ніж n-1 вершина має степінь не менше 2. Тоді сума степенів вершин не менше ніж $2(n\text{-}1)+1 = 2n\text{-}1$, а це суперечить тому, що в дереві вона дорівнює $2(n\text{-}1)$ (за теоремою 26).

3.9. Нехай у дереві є m кінцевих вершин. Тоді всі інші (їх n-m) мають степені не менше 2, причому одна з них має степінь s. За теоремою 26 граф має n-1 ребро. Тоді з урахуванням теореми 3 одержуємо $2(n\text{-}1) \geq m+s+2(n\text{-}m\text{-}1)$, звідки $m \geq s$. Можна міркувати й інакше. З вершини степеня s виходять s маршрутів, і кожен з них не має спільних вершин, окрім початкової, з іншими маршрутами (інакше б виникали цикли) і закінчується в кінцевій вершині. Тому таких вершин не менше s.

3.12. Нехай у графі m кінцевих вершин, $m \leq n$. За умовою він зв'язний і має m ребер, тому $n\text{-}1 \leq m$. Отже, $n\text{-}1 \leq m \leq n$. За теоремою 3 сума степенів вершин удвічі більше, ніж кількість ребер. Тому, якщо $m = n$, то всі вершини кінцеві, і $m = 2m$, що неможливо. Залишається випадок $m = n$-1, коли граф є деревом за теоремою 26, маючи при цьому зіркову структуру.

3.13. Застосуємо індукцію за діаметром $D(T)$ дерева T. Якщо $D(T) = 0$ або $D(T) = 1$, твердження очевидне. Нехай рівність справджується для будь-якого дерева, діаметр якого не більше n ($n \geq 1$) та дерево T має діаметр n+1. Вилучення кінцевих вершин дає дерево T_2, для якого $R(T_2) = [(D(T_2)+1)/2]$. Але за лемою 2 $R(T_2) = R(T_1)$-1 і $D(T_2) = D(T_1)$-2. Тоді $R(T_1) = R(T_2)+1 = [(D(T_2)+1)/2]+1 = [(D(T_2)+1)/2+1] = [(D(T_2)+2+1)/2\rceil = [(D(T_1)+1)/2]$. За принципом індукції твердження доведено.

3.16. ($\Rightarrow$) Якщо діаметр дерева дорівнює 2, то після вилучення всіх кінцевих вершин залишиться граф K_1. Таким чином, усі вершини дерева, окрім однієї центральної, є кінцевими, тобто дерево являє собою $K_{1,n}$. Частина ($\Leftarrow$) очевидна.

3.18. а) ($\Rightarrow$) Якщо граф має лише один простий цикл, то цей цикл належить тільки одній компоненті зв'язності графа, а всі інші компоненти (якщо є) ациклічні. Вилучивши з циклу одне ребро, одержимо ациклічний граф, тобто $|E|$-1 = $|V|$-k. Звідси $\nu(G) = 1$.

($\Leftarrow$) Нехай $\nu(G) = 1$. Цикломатичне число незв'язного графа дорівнює сумі невід'ємних цикломатичних чисел його зв'язних компонент, тому лише одне з них дорівнює 1, а всі інші — 0. Компоненти зв'язності з цикломатичним числом 0 є деревами і не мають циклів. Розглянемо компоненту з цикломатичним числом 1. Якщо вона не має циклів, то є деревом і має цикломатичне число 0, що суперечить умові. Якщо в ній є два різних простих цикли, то існує ребро e, яке належить рівно одному з цих двох циклів. При його вилученні другий цикл залишається, тобто $\nu(G) \geq 2$, що також суперечить умові.

б)($\Rightarrow$) Якщо $\nu(G) = 1$, то за пунктом *а* граф має рівно один простий цикл. Вилучивши одне ребро цього циклу, одержимо ациклічний граф з тією ж кількістю зв'язних компонент.

($\Leftarrow$) Якщо після вилучення одного ребра граф стає лісом і при цьому не змінюється кількість компонент зв'язності k, то в графі виконується рівність $|E|$-1 = $|V|$-k, звідки $\nu(G) = |E|-|V|+k = 1$.

Зауваження. Умова незбільшення кількості компонент зв'язності при вилученні ребра суттєва. Якщо граф G є лісом, то після вилучення довільного ребра він залишається лісом (з більшою кількістю компонент зв'язності), але при цьому $\nu(G) = 0$.

3.19. Скористаємося індукцією за цикломатичним числом графа. Якщо цикломатичне число дорівнює 0, то кількість циклів і цикломатичне число збігаються (теорема 29). Нехай для всіх графів з $\nu(G) \leq t$ ($t \geq 0$) потрібну нерівність доведено. Розглянемо довільний граф з цикломатичним числом t+1. Він містить принаймні один цикл. Вилучимо з графа одне ребро цього циклу. При цьому кількість компонент зв'язності графа не зміниться, тому його цикломатичне число на 1 менше, ніж у початкового графа, і дорівнює t. Кількість циклів зменшиться принаймні на 1. За припущенням індукції в новому графі не менше t циклів. У початковому графі є всі цикли, що є в новому, і ще принаймні один — той, з якого вилучено ребро, тому загальна кількість циклів у початковому графі не менше t+1. За принципом трансфінітної індукції кількість циклів у будь-якому графі не менше його цикломатичного числа.

Глава 4. Ізоморфізм графів

4.1. Поняття ізоморфізму графів

Буквальний переклад слова “ізоморфізм” означає “однаковість форми”. Форма графа — це його структура. Таким чином, ізоморфізм графів означає однаковість їх структури. Зробимо необхідні уточнення.

Два графи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називаються *ізоморфними* (це позначається $G_1 \cong G_2$), якщо між множинами їх вершин існує взаємно однозначне відображення $\varphi : V_1 \to V_2$, яке зберігає суміжність, тобто для довільних вершин v і w $(v, w) \in E_1$ тоді й тільки тоді, коли $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$. При цьому φ називається *ізоморфним відображенням* або *ізоморфізмом* графа G_1 на граф G_2. На рис. 16, *а*, *б* наведено дві пари ізоморфних графів.

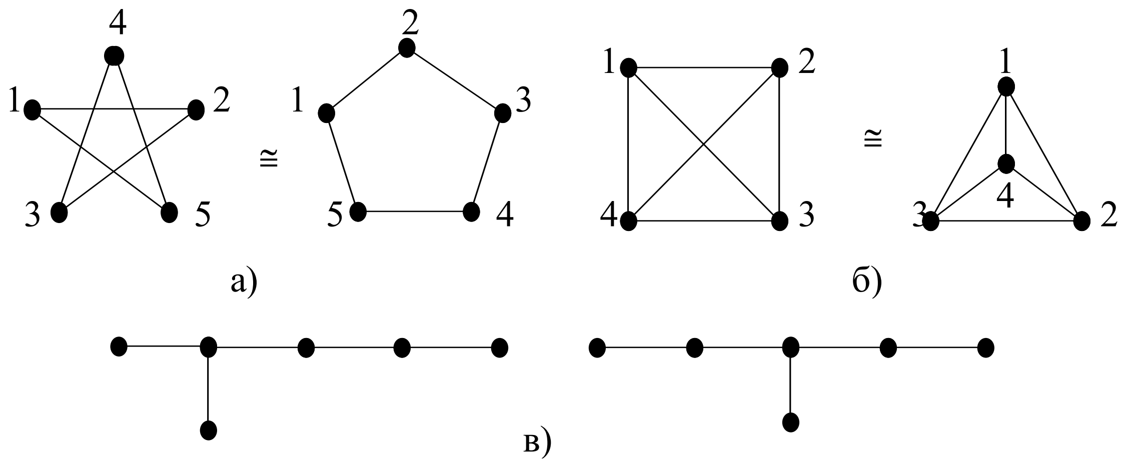


Рис. 16. Дві пари ізоморфних графів та пара неізоморфних

Про ізоморфні графи кажуть, що вони рівні з точністю до ізоморфізму.

Ізоморфізм графа на себе називається *автоморфізмом*. Очевидно, що тотожне відображення множини вершин графа є автоморфізмом (цей автоморфізм називається *тривіальним*). Неважко також переконатися, що якщо φ є ізоморфізмом графа G_1 на граф G_2, то відображення φ^{-1} є ізоморфізмом G_2 на G_1. Крім того, якщо є ізоморфізм φ графа G_1 на граф G_2 і ізоморфізм γ графа G_2 на G_3, то їх композиція $\varphi\circ\gamma$ буде ізоморфізмом G_1 на G_3.

Теорема 33. Графи ізоморфні тоді й тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення.

□ Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_1 \cong G_2$ і $\varphi : V_1 \to V_2$ — ізоморфізм G_1 на G_2. Розглянемо графи $\overline{G}_1 = (V_1, \overline{E}_1)$, $\overline{G}_2 = (V_2, \overline{E}_2)$. Нехай v та w — довільні вершини графа G_1. За означеннями доповнення та ізоморфізму $(v, w) \in \overline{E}_1 \Leftrightarrow (v, w) \notin E_1 \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \notin E_2 \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in \overline{E}_1$, тобто доповнення ізоморфні, причому з тим самим відображенням φ. □

Теорема 34. Якщо φ — ізоморфізм графа G_1 на G_2, то вершини v у графі G_1 і $\varphi(v)$ у G_2 мають однакові степені.

□ Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ і $v \in V_1$. Якщо v не має суміжних вершин, то і $\varphi(v)$ не може мати таких, тобто $\delta(v) = \delta(\varphi(v)) = 0$. Якщо v має суміжні вершини, то, за означенням ізоморфізму, для будь-якої вершини w маємо: $w \in O(v)$ тоді й тільки тоді, коли $\varphi(w) \in O(\varphi(v))$. Отже, $|O(v)| = |O(\varphi(v))|$, тобто $\delta(v) = \delta(\varphi(v))$. □

Задачі

4.1. Зобразити всі попарно неізоморфні дерева, кількість вершин у яких:

а) 5; б) 6; в) 7.

4.2. Інваріанти ізоморфних графів

Під *інваріантом* графа G розуміють числовий параметр, пов’язаний з G, значення якого однакові для всіх графів, ізоморфних G. Деякі найпростіші інваріанти представлено в наступних теоремах.

Теорема 35. Ізоморфні графи мають однакову кількість вершин.

□ Це випливає з існування взаємно однозначної відповідності між множинами вершин. □

Ізоморфізм φ можна продовжити на множину ребер наступним чином: покладемо $\varphi'((v, w)) = (\varphi(v), \varphi(w))$. З властивостей φ випливає, що відображення $\varphi' : E_1 \to E_2$ є взаємно однозначним. Звідси маємо наступну теорему.

Теорема 36. Ізоморфні графи мають однакову кількість ребер.

Теорема 37. Ізоморфні графи для довільного k ($k \geq 0$) мають однакову кількість вершин степеня k.

□ Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $\varphi : V_1 \to V_2$ — ізоморфізм графа G_1 на граф G_2, $v \in V_1$ і $\delta(v) = k$. За теоремою 34 $\delta(\varphi(v)) = k$, тому ізоморфізм взаємно однозначно відображає множину вершин степеня k графа G_1 на множину вершин степеня k графа G_2. Тоді ізоморфні графи G_1 і G_2 мають однакову кількість вершин степеня k. □

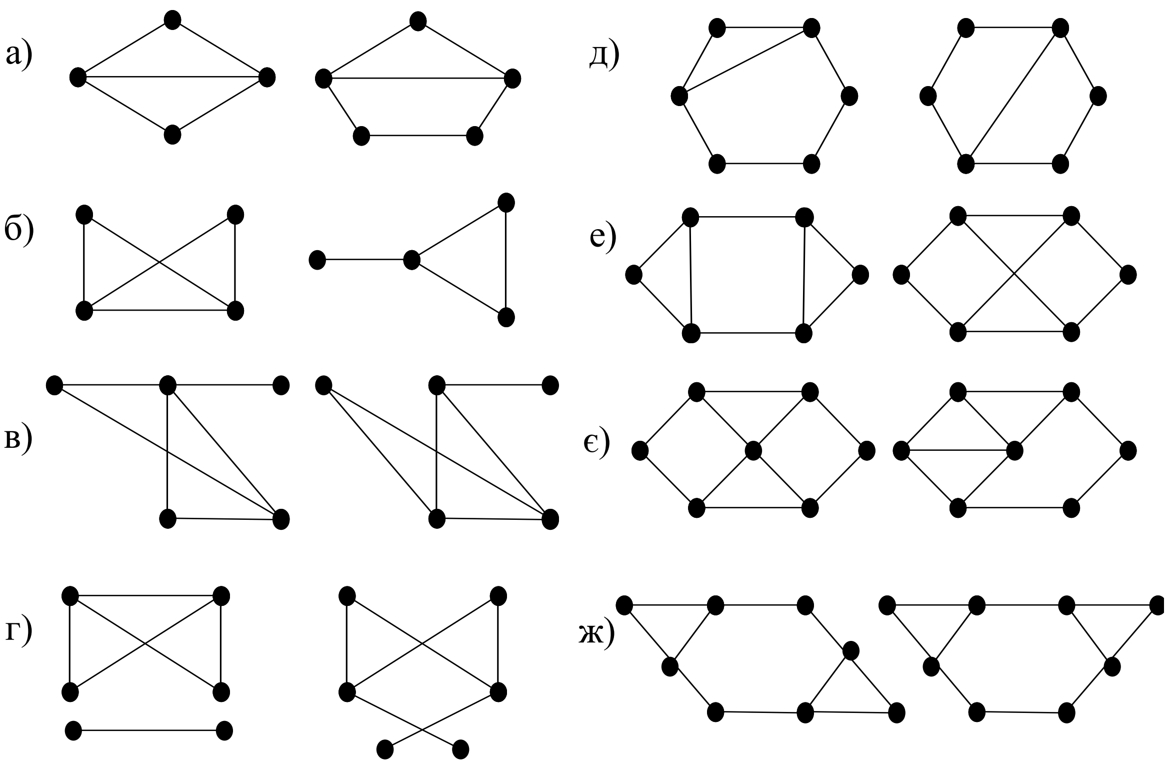


Рис. 17. Пари неізоморфних графів

Ізоморфізм можна продовжити на множину маршрутів графа аналогічно тому, як його було продовжено на множину ребер. Маршруту $S = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ у графі G_1 поставимо у відповідність маршрут $\varphi''(S) = (\varphi(v_0), \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k))$ у графі G_2. Оскільки φ — ізоморфізм, вказане відображення φ'' буде взаємно однозначним відображенням множини маршрутів G_1 на множину маршрутів G_2. Воно зберігає довжину маршруту, а також властивості маршруту бути простим ланцюгом, повним простим ланцюгом, максимальним простим ланцюгом, циклом, простим циклом. З цих міркувань випливає наступна теорема.

Теорема 38. В ізоморфних графах для довільного k ($k \geq 0$) існує взаємно однозначна відповідність:

1) між множинами простих ланцюгів довжини k;
2) між множинами простих циклів довжини k.

Висновок 38.1. Ізоморфізм зберігає відстань між вершинами графа.

Висновок 38.2. Для зв'язного графа ексцентриситет вершин, діаметр та радіус є інваріантами.

Рівність інваріантів є необхідною умовою ізоморфності графів, проте не є достатньою, тобто графи з однаковими значеннями деяких інваріантів не обов'язково ізоморфні. Наприклад, графи на рис. 16, *в* для довільного $k \geq 0$ мають однакові кількості вершин степеня k та однакові кількості простих циклів довжини k, але не є ізоморфними. Проте вершини степеня 3 в них мають різні ексцентриситети.

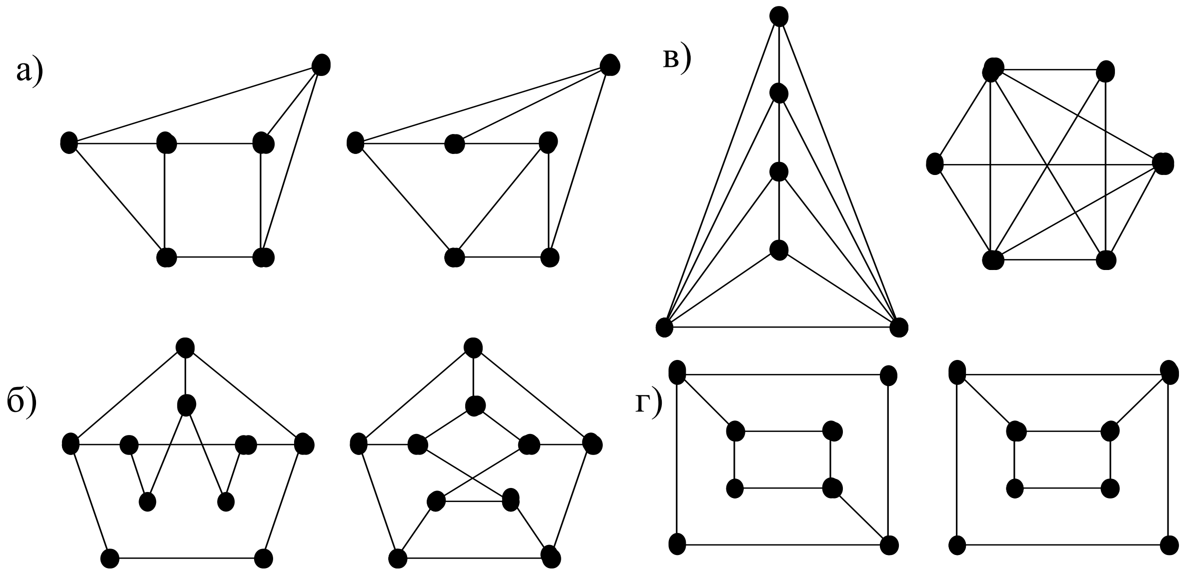


Рис. 18. Пари графів

Задачі

4.2. Довести, що графи неізоморфні, якщо при деякому k ($k \geq 0$) кількості вершин степеня k в графах різні.

4.3. Довести, що в ізоморфних графів кількості простих циклів довжини k однакові за будь-якого k.

4.4. Довести, що ізоморфні графи мають однакові кількості компонент зв’язності.

4.5. Пояснити, чому пари графів, зображені на рис. 17, не є ізоморфними.

4.6. Серед пар графів, зображених на рис. 18, визначити пари ізоморфних і пари неізморфних графів. Відповіді обгрунтувати.

4.7. Довести, що для довільного $n \geq 2$ з точністю до ізоморфізму існують лише два графи з n вершинами, в яких n-1 вершина має попарно різні степені, причому з цих двох графів рівно один є зв’язним.

4.8. Побудувати нетривіальний граф з найменшою кількістю вершин, який не має нетривіальних автоморфізмів.

4.9. Побудувати нетривіальний ациклічний граф з найменшою кількістю вершин, який не має нетривіальних автоморфізмів.

4.10. Побудувати всі попарно неізоморфні графи із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють 2, 2, 3, 3, 3, 5.

4.11. Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають:

а) 7 вершин і 18 ребер;

б) 8 вершин, сума степенів яких не менше 53;

в) 10 вершин і 43 ребра;

г) n вершин і $n(n-1)/2-2$ ребер?

4.3. Самодоповнювальні графи

Самодоповнювальним називається граф, ізоморфний своєму доповненню.

Наприклад, самодоповнювальними є графи, зображені на рис. 19. Самодоповнювальним також є тривіальний граф.

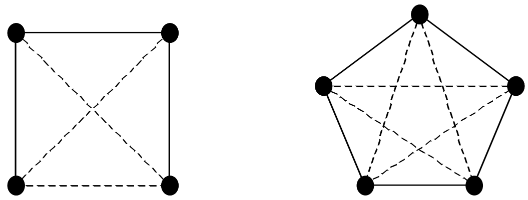


Рис. 19. Самодоповнювальні графи

Теорема 39. Кількість вершин будь-якого нетривіального самодоповнювального графа дорівнює або $4k$, або $4k+1$, $k \in N$.

□ Нехай самодоповнювальний граф $G = (V, E)$ має n вершин. $G \cong \overline{G}$, тому граф і його доповнення мають однакові кількості ребер. Тоді з того, що $G \cup \overline{G} = K_n$ випливає, що $|E| = n(n\text{-}1)/4$. Це число буде цілим, якщо n чи n-1 ділиться на 4 без остачі, тобто $n = 4k$ чи $n\text{-}1 = 4k$, або $n = 4k+1$, при деякому натуральному k. При $n = 4k+3$ або $n = 4k+2$ число $n(n\text{-}1)/4$ не є цілим і не може виражати кількість ребер. □

Висновок 39.1. Довільний самодоповнювальний граф містить або $4k^2-k$, або $4k^2+k$ ребер, $k \in N$.

□ Для тривіального графа твердження очевидне. Якщо $n = 4k$, то $|E| = n(n\text{-}1)/4 = k(4k\text{-}1) = 4k^2\text{-}k$. Якщо $n = 4k+1$, то $|E| = n(n\text{-}1)/4 = (4k+1)k = 4k^2+k$.□

Задачі

4.12. Чи існує самодоповнювальний граф, у якого кількість вершин дорівнює:

а) 6; б) 7; в) $4k-1$, $k \in N$?

4.13. Описати всі дерева, які є самодоповнювальними графами.

4.14. Чи існує самодоповнювальний граф, у якого кількість ребер дорівнює:

(а) 5; (б) 7; (в) $4k^2-2$, $k \in N$?

4.15. Довести, що самодоповнювальний граф завжди зв'язний.

4.16. Довести, що в нетривіальному самодоповнювальному графі немає ізольованих вершин та вершин, суміжних з усіма іншими.

4.17. Довести, що в самодоповнювальному графі з n вершинами кількості вершин степеня k та степеня $n\text{-}k\text{-}1$ однакові ($0 \le k \le n\text{-}1$).

4.18. Довести, що існує тільки один самодоповнювальний граф із чотирма вершинами.

4.19. Довести, що існують тільки два самодоповнювальних графи з п'ятьма вершинами.

4.20. Довести, що діаметр нетривіального самодоповнювального графа дорівнює або 2, або 3.

Відповіді та вказівки

4.1. а) 3; б) 6; в) 9. *Вказівка*. Варто малювати їх у порядку зростання чи спадання діаметра. **4.2.** Це твердження є протилежним до твердження теореми 37.

4.3. Використати теорему 38. **4.4.** Використати висновок 38.1. **4.5.** Розгляньте кількості: а) вершин; б) вершин степеня 1; в) вершин степеня 4; г) зв'язних компонент; д) простих циклів довжини 4; е), є) простих циклів довжини 3; ж) ребер у найкоротших маршрутах між "відповідними" вершинами (зокрема, розгляньте діаметри). **4.6.** Графи в парах а), в) ізоморфні; у парах б), г) — ні (розгляньте кількості простих циклів довжини 4). **4.8.** Якщо граф має нетривіальний автоморфізм і є незв'язним, то деяка його компонента зв'язності також має нетривіальний автоморфізм, тому достатньо розглядати тільки зв'язні графи. Якщо доповнення графа незв'язне й не є порожнім графом, то деяка його компонента зв'язності має нетривіальний автоморфізм. Тому достатньо розглядати зв'язні графи зі зв'язними доповненнями. Перебираючи послідовно всі такі графи з 2, 3, 4, 5, 6 вершинами, знайти шуканий граф (див. рис. 20, *а*).

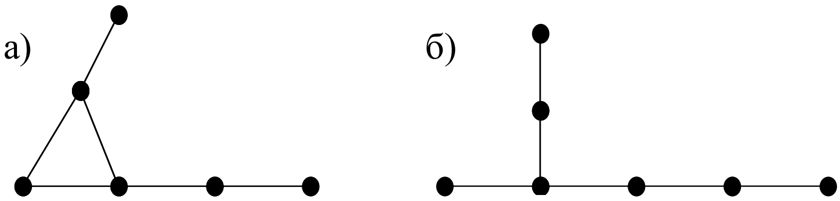


Рис. 20. Найменші графи без нетривіальних автоморфізмів

4.9. Див. вказівку до задачі **4.8**. Граф наведено на рис. 20, б. **4.10.** *Вказівка*. Вилучити з графа вершину, суміжну з усіма іншими, одержати новий набір степенів (1, 1, 1, 2, 2), підрахувати кількість ребер (залишок має 5 вершин та 4 ребра; для нього є 2 варіанти). Додати вилучену вершину і одержати 2 графи. **4.11.** а) 5; б) 2; в) 2; г) 0 при $n < 3$, 1 при $n = 3$, 2 при $n \ge 4$. *Вказівка*. За теоремою 33 достатньо підрахувати кількість попарно неізоморфних доповнень указаних графів. **4.12.** а), б), в) не існує. *Вказівка*. Використати теорему 39. **4.13.** Дивись вказівку та відповідь до задачі 3.6. **4.14.** Використати висновок 39.1. а) Існує, C_5; б) не існує; в) не існує при $k > 2$, при $k = 2$ існує самодоповнювальний граф, у якому 8 вершин та 14 ребер: ({1, 2, …, 8}, {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 8), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 4), (3, 6), (4, 5)}). **4.15.** Використати задачу 4.4. **4.16.** Використати задачу 4.15 та теорему 6. **4.17.** Див. вказівку до задачі 4.16. **4.19.** За висновком 39.1 такий граф необхідно повинен мати 5 ребер, бути зв'язним і не мати вершин степеня 4. Сума степенів усіх вершин дорівнює 10. Тоді (див. задачу 4.17) існують 3 різних набори степенів вершин (3, 3, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 2), (3, 2, 2, 2, 1). Перші два дають по одному самодоповнювальному графу з множинами ребер {(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 4), (3, 5)} та {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)}, а третій не відповідає жодному самодоповнювальному графу. 4.20**.** Використати висновок 38.2 та задачу 2.22.

Розв'язання

4.7. Для $n = 2$ твердження задачі очевидне. Доведемо, що воно має місце при $n \ge 3$. Існування вказаного зв'язного графа встановлюється в задачі 1.5. У такому графі з n вершинами лише одна вершина має степінь n-1 і хоча б одна — степінь 1. Дійсно, зі зв'язності випливає, що граф не має вершин степеня 0, а оскільки n-1 вершина має попарно різні степені, необхідно існує вершина степеня n-1. Якщо таких вершин дві, то в графі немає вершини степеня 1, а тоді не більше ніж n-2 вершини можуть мати попарно різні степені, що є суперечністю. Доповнення до цього графа буде незв'язним і в ньому теж n–1 вершина має попарно різні степені. Враховуючи, що доповнення до незв'язного графа є зв'язним (задача 2.20), достатньо довести, що зв'язний граф єдиний. Зробимо це індукцією за кількістю вершин.

Для тривершинних графів твердження очевидне. Нехай твердження справджується для всіх графів указаного вигляду, які мають не більше n-1 (n≥4) вершини. Розглянемо два зв'язних графи з n вершинами, в яких n-1 вершина має попарно різні степені. Кожен з цих графів має рівно одну вершину, суміжну з усіма іншими. Вилучимо ці вершини з графів. При цьому степені вершин в одержаних графах будуть рівно на 1 менше ніж у початкових графах, і серед вершин існуватиме n-2 вершини з попарно різними степенями. Оскільки початкові графи мали по одній вершині степеня 1, у графах-залишках ці вершини стають ізольованими, тобто графи незв'язні. Якщо вони неізоморфні, то неізоморфні і їх зв'язні доповнення, кожне з яких має n-2 вершини з попарно різними степенями, що суперечить припущенню індукції. Тому вони ізоморфні. Додамо до цього ізоморфізму пару вилучених вершин і одержимо ізоморфізм між початковими n-вершинними графами. Згідно з принципом трансфінітної індукції твердження доведено.

4.18. За висновком 39.1 такий граф необхідно повинен мати 3 ребра й бути зв'язним. Таких варіантів два — $K_{1,3}$ та P_4. З них самодоповнювальним є тільки P_4.

Глава 5. Планарність

5.1. Укладання графа. Плоскі та планарні графи

Повернемося до задачі про три будинки та три колодязі. Її питання в термінах теорії графів можна сформулювати так: чи можна укласти діаграму графа $K_{3,3}$ на площині так, щоб лінії, відповідні ребрам, не мали спільних точок, крім вершини, інцидентної їм обом. Для графа $K_{3,3}$ відповідь буде "не можна" (це доводиться в розв'язанні задачі 5.12). Взагалі, можливість укладання графа на площині важлива, коли треба знайти діаграму графа, в якій ребра перетинаються лише в інцидентних їм вершинах. Це питання постає в задачах, пов'язаних з картами доріг, електричними схемами та іншими видами об'єктів.

Уточнимо, що означає "укласти граф на поверхні". Кажуть, що граф *укладається на поверхні*, якщо він ізоморфний графу, вершини якого є точками поверхні, а ребра — неперервними лініями поверхні без самоперетинів[1], що з'єднують відповідні вершини, причому жодні два ребра не мають спільних точок, окрім вершини, інцидентної їм обом (цей граф інколи називають *укладкою*). Аналогічним є поняття укладання графа в просторі.

Теорема 40. Кожний граф $G = (V, E)$ укладається в тривимірний евклідів простір E^3.

□ Вершини графа розміщуємо в різних точках осі Ox. З в'язки площин, що проходять через Ox, виберемо $|E|$ різних. Кожне ребро $(v, w) \in E$ відображаємо у відповідній площині півколом, що проходить через вершини v та w. В результаті одержимо укладання графа G в E^3, оскільки всі ребра лежать в різних площинах і не перетинаються у внутрішніх точках. □

Планарним називається граф, який можна укласти на площині, *плоским* — граф, який вже укладено на площині. Таким чином, планарним називається граф, ізоморфний деякому плоскому графу.

Гранню плоского графа називається максимальна за включенням множина точок площини, кожну пару яких можна з'єднати неперервною лінією без самоперетинів і перетинів ребер графа в точках, відмінних від її кінців. Кожний плоский граф має рівно одну необмежену грань, яка називається *зовнішньою*; інші грані називаються *внутрішніми*. *Межею грані* будемо вважати множину ребер, що належать грані. Множину всіх граней плоского графа позначатимемо через P.

---

[1] *Поняття неперервної лінії можна формалізувати за допомогою жорданової кривої.* Жорданова крива *на площині — це множина точок площини, координати яких задовольняють рівнянням $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де φ та ψ — неперервні функції аргументу t на відрізку $[a; b]$. Таким чином, жорданова крива є неперервним образом відрізку. Якщо різним значенням аргументу t відповідають різні точки кривої (крім, можливо, $(\varphi(a); \psi(a)) = (\varphi(b); \psi(b))$), то кажуть, що крива* не має кратних точок (самоперетинів)*. Якщо $(\varphi(a); \psi(a)) = (\varphi(b); \psi(b))$, то крива називається* замкненою*. Наступне твердження є інтуїтивно очевидним (хоча доведення його не таке й просте).* ***Теорема Жордана***. *Довільна замкнена жорданова крива без кратних точок ділить площину на дві області, одна з яких є внутрішньою відносно цієї кривої, а інша зовнішньою.*

Плоскою картою називається зв'язний плоский граф разом з усіма своїми гранями.

Приклади планарних графів та їх плоских карт наведено на рис. 21.

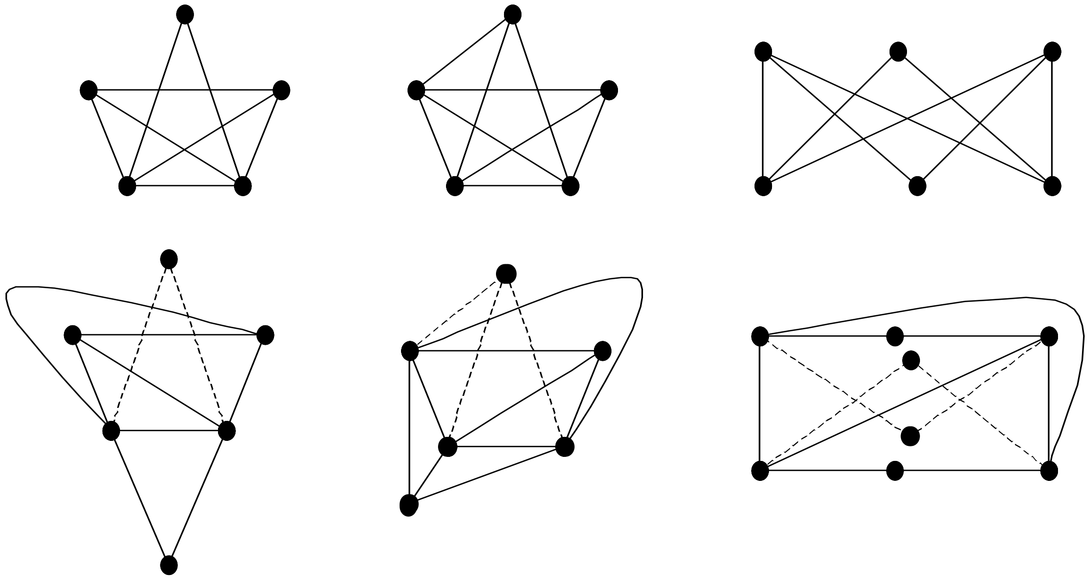


Рис. 21. Графи та їх плоскі карти. Пунктиром показано перенесені вершини та ребра

Теорема 41. Граф є планарним тоді й тільки тоді, коли він укладається на сфері.

□ (⇒) Граф скінченний, тому його можна вмістити в круг C скінченного радіуса R з центром у деякій точці O_1 (на межі круга точок графа немає). Проведемо з центра O_1 скінченний перпендикуляр O_1O_2 до площини. Нехай точка O — середина відрізка O_1O_2. Побудуємо сферу S з центром у точці O та радіусом $r = |OO_1|$, яка дотикається площини у точці O_1. Для кожної точки X площини всередині кола ($|O_1X| < R$) побудуємо площину P_X, що проходить через O_1O_2 та X. Точці X поставимо у відповідність точку Y сфери, $Y \in P_X \cap S$, для якої $l/(\pi r) = |O_1X|/R$, де l — довжина криволінійного відрізка сфери O_1Y. Позначимо цю відповідність через φ. За означенням, φ є взаємно однозначним відображенням множини внутрішніх точок круга C на множину точок сфери $S \backslash \{O_2\}$. Тоді, якщо граф був плоским, його образ на сфері є сферичним укладанням.

(⇐) Нехай граф укладено на сфері S. Візьмемо довільну сферичну грань графа та оберемо на ній довільну точку O_2, що не належить графу. З обраної точки побудуємо діаметр сфери O_2O_1 та в точці O_1 проведемо площину, дотичну до сфери. Побудуємо на ній круг C з центром у точці дотику O_1 та радіусом R ($R > 0$). Зворотне відображення φ^{-1} множини точок сфери $S \backslash \{O_2\}$ на внутрішню частину круга C також є взаємно однозначним і переводить сферичне укладання графа в плоске укладання, причому грань, яка містить точку O_2, відображається в зовнішню грань графа. □

Висновок 41.1. Для довільного ребра (довільної вершини) планарного графа знайдеться така укладка графа на площині, що це ребро (ця вершина) належить зовнішній грані.

□ У доведенні теореми при побудові відображення сферичного графа на площину в якості точки O_2 треба взяти внутрішню точку грані, яка містить вказане ребро чи вершину. □

Зауваження. При переході від плоского укладання до сферичного й навпаки в доведенні теореми 41 кількість граней залишається незмінною.

Неважко бачити, що кожен підграф планарного графа є планарним, а граф є планарним тоді й тільки тоді, коли планарна кожна з його зв'язних компонент.

Нехай грань $r \in P$ містить рівно k_r ребер і рівно b_r з них не входять у жодний цикл графа. Тоді *степенем грані* r будемо називати число $\Delta_r = k_r + b_r$. Наприклад, межею зовнішньої грані на рис. 22, *а*, є множина ребер {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 1)}, а на рис. 22, *б* — {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (5, 6), (6, 7), (7, 5)}. Степені цих граней відповідно 6 і 7.

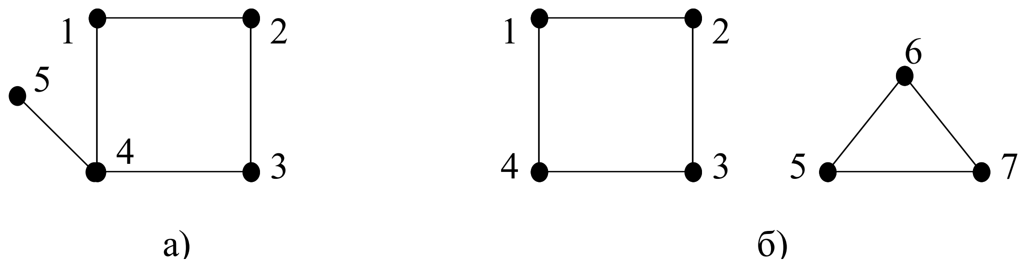


Рис. 22. Приклади плоских графів

Кожна точка площини, яка не лежить на ребрі, належить рівно одній грані. Якщо ребро не входить до складу жодного циклу графа, кожна його точка, відмінна від вершини графа, належить тільки одній грані, інакше — двом граням. Кожне ребро плоского графа або розділяє дві різні грані, або лежить усередині однієї грані. Отже, кожне ребро графа або входить у межі двох граней, або є елементом межі лише однієї грані, але при обчисленні її степеня враховується двічі. Отже, одержуємо таку теорему.

Теорема 42. Для довільного плоского графа $G = (V, E)$ справджується $\sum_{r \in P} \Delta_r = 2|E|$.

Ізольована вершина графа належить одній грані графа. Вершина степеня k ($k \geq 1$) плоского графа може належати граням у кількості від 1 до k. Точніше, нехай інцидентні їй ребра входять до складу l циклів, які обмежують ззовні l граней. Якщо $l < k$, то вершина належить $l+1$ граням, а якщо $l = k$, — k граням. Наприклад, у графах на рис. 23 усі вершини, позначені v, мають степені 7, але належать 1, 2 та 7 граням відповідно.

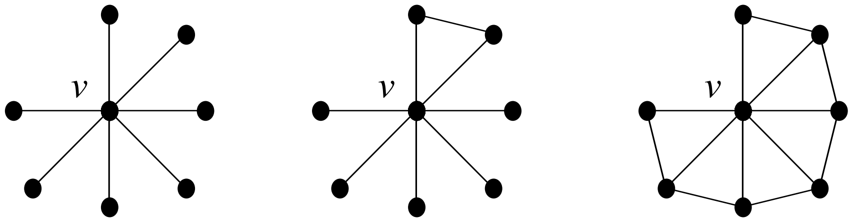


Рис. 23. Степені вершин та грані

Теорема 43. Довільний планарний граф ізоморфний деякому плоскому графу, всі ребра якого є відрізками прямих. (Без доведення.)

Задачі

5.1. Нехай граф G складається з двох планарних зв'язних компонент $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$. Довести, що граф G', отриманий з G злиттям двох довільних вершин $v_1 \in V_1$ і $v_2 \in V_2$ в одну вершину v, є планарним.

5.2. Довести, що граф планарний тоді й тільки тоді, коли кожен його блок планарний.

5.3. Довести, що будь-яке дерево є планарним графом. Скільки граней і якого степеня має дерево з n вершинами?

5.2. Теорема Ейлера та властивості планарних графів

Теорема 44 (Ейлера). Якщо $G = (V, E)$ — зв'язний плоский граф, то $|V|-|E|+|P| = 2$.

□ Для довільного плоского графа побудуємо його кістякове дерево (V, E_0), для якого формула справджується. Це кістякове дерево є плоским графом з однією гранню, тобто $|P_0| = 1$. За теоремою 26 для нього $|E_0| = |V|-1$, звідки $|V|-|E_0|+|P_0| = 2$.

Далі будемо послідовно додавати ребра графа, що не увійшли до кістякового дерева. Нехай на деякому кроці утворено граф (V, E_k) ($k = 0, 1, \ldots, \nu(G)$-1), для якого $|V|-|E_k|+|P_k| = 2$. При додаванні ребра e кількість ребер збільшується на 1, але при цьому деяка грань розділяється на дві частини, тобто кількість граней також збільшується на 1. При цьому утворюється граф (V, E_{k+1}), де $E_{k+1} = E_k \cup \{e\}$ і $|P_{k+1}| = |P_k|+1$. Для нього $|V|-|E_{k+1}|+|P_{k+1}| = |V|-(|E_k|+1)+(|P_k|+1) = |V|-|E_k|+|P_k| = 2$. При додаванні останнього ребра утворюється граф $(V, E_{\nu(G)}) = (V, E)$, для якого $|V|-|E|+|P| = 2$. □

Висновок 44.1. Якщо $G = (V, E)$ — плоский граф з k зв'язними компонентами, то $|V|-|E|+|P| = k+1$.

Висновок 44.2. Кількість граней будь-якої плоскої карти для планарного графа $G = (V, E)$ є величиною сталою й дорівнює $|E|-|V|+k+1$, де k — кількість зв'язних компонент графа G

Зауваження. Різні плоскі карти одного й того самого планарного графа можуть мати грані з різними наборами степенів. Приклад наведено на рис. 24.

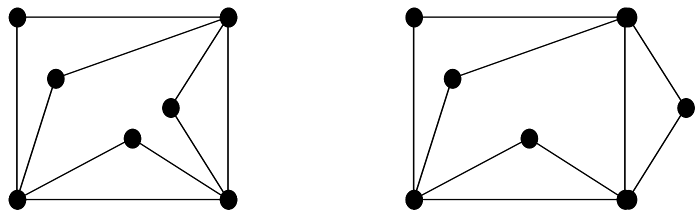


Рис. 24. Два ізоморфних плоских графи з різними наборами степенів граней

Висновок 44.3. Якщо граф має n вершин ($n \ge 3$), m ребер і є планарним, то $m \le 3n$-6.

 Якщо граф має менше двох ребер, то $m < 3 = 3*3-6 \le 3n-6$. Доведемо твердження для планарних графів, що мають не менш ніж два ребра і k компонент зв'язності. В довільній плоскій карті графа з m ребрами, $m \ge 2$, степінь кожної грані не менше 3, тоді з використанням теореми 42 маємо $2m = \sum_{r \in P} \Delta_r \ge 3|P| = 3(m-n+k+1)$, звідки $m \le 3n-3k-3 \le 3n-6$.

Висновок 44.4. Якщо граф має n вершин, m ребер ($m \ge 2$), k компонент зв'язності й є планарним, то $m \le 3n-3k-3 \le 3n-6$.

Висновок 44.5. Граф K_5 не є планарним.

 K_5 має 5 вершин і 10 ребер. Оскільки $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$, то планарним він бути не може.

Задачі

5.4. Довести висновок 44.2, не використовуючи твердження теореми 44.

5.5. Чи існує планарний граф, який має 7 вершин і 16 ребер?

5.6. Довести, що графи G і $\overline{G}$ не можуть бути одночасно планарними, якщо кількість вершин у них не менше 11.

5.7. Довести, що в будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не більше 5.

5.8. Довести, що в будь-якому плоскому графі є вершина степеня менше 3 або грань степеня менше 6.

5.9. Довести, що у зв'язному плоскому графі з n вершинами і m ребрами, степені всіх граней якого дорівнюють k, виконується рівність $m(k-2) = k(n-2)$.

5.10. Нехай зв'язний планарний граф з n вершинами і m ребрами має принаймні один цикл, і довжини всіх простих циклів не менше k. Довести, що $m(k-2) \le k(n-2)$.

5.11. Нехай планарний граф з n вершинами ($n \ge 3$), m ребрами не містить трикутників. Довести, що $m \le 2n-4$.

5.12. Довести, що повний двочастковий граф $K_{3,3}$ не є планарним.

5.13. Визначити, які з повних двочасткових графів $K_{n,m}$ планарні.

5.3. Критерії планарності

У цьому підрозділі розглядаються дві необхідні й достатні умови планарності графів. У цих умовах використовуються непланарні графи $K_{3,3}$ і K_5, а також одна з двох додаткових операцій з графами — підрозбиття ребра та стягування вершин.

Почнемо з підрозбиття. Нехай граф $G = (V, E)$ має ребро $e \in E$, $e = (v, w)$. *Операція підрозбиття ребра* e полягає в тому, що з графа вилучається ребро e, до множини вершин додається нова вершина u, а до множини ребер — нові ребра (v, u) і (u, w). Таким чином, утворюється граф $G' = (V \cup \{u\}, (E \setminus \{(v, w)\}) \cup \{(v, u), (w, u)\})$. Степені всіх вершин з множини V у графі G' залишаються такими самими, як і в G, а додана вершина має степінь 2. Відмітимо, що це перетворення зберігає різницю між кількостями ребер та вершин графа.

Графи називаються *гомеоморфними*, якщо їх можна одержати з одного й того ж графа за допомогою підрозбиття його ребер.

Наприклад, граф Петерсена (рис. 25, *а*) не містить підграфа, гомеоморфного графу K_5, оскільки число вершин степеня, не рівного 2, в гомеоморфних графах однакове, а граф Петерсена на відміну від графа K_5 не містить жодної вершини степеня 4.

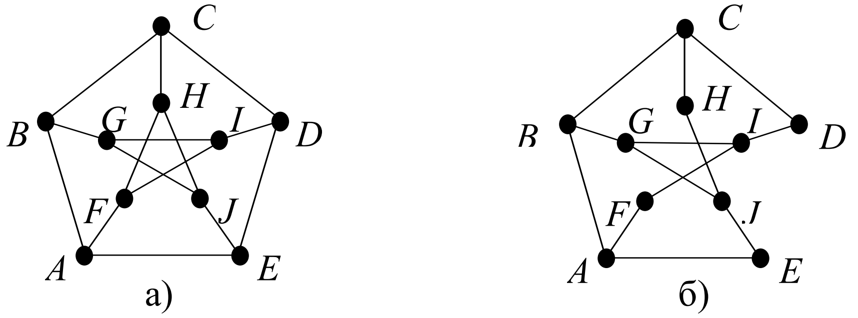


Рис. 25. Граф Петерсена та його підграф

У той же час, якщо з графа Петерсена вилучити, наприклад, ребра DE і FH, то залишиться граф, гомеоморфний непланарному графу $K_{3,3}$ (на рис. 25, *б* трійки вершин B, I, J та A, C, G утворюють його частки, а D, E, F, H одержуються в результаті підрозбиття його ребер).

Теорема 45. Операція підрозбиття ребер графа зберігає характер планарності графа.

□ Операція підрозбиття ребра на рівні діаграми графа рівносильна тому, що на цьому ребрі розташовується додаткова вершина, а далі утворені частини ребра розглядаються як ребра. Таким чином, підрозбиття ребра переводить плоску карту в плоску карту. Обернена операція рівносильна тому, що додана точка розглядається не як вершина, а як проміжна точка ребра. Отже, обернена операція також переводить плоску карту в плоску карту. Звідси граф, утворений в результаті підрозбиття ребра непланарного графа, також непланарний. □

Висновок 45.1. Гомеоморфні графи мають однаковий характер планарності.

Висновок 45.2 (достатня умова непланарності). Граф, що містить підграф, гомеоморфний K_5 або $K_{3,3}$, не є планарним.

□ Якщо граф планарний, то кожен його підграф планарний. Але планарний підграф не може бути гомеоморфним непланарному графу, а графи K_5 і $K_{3,3}$ непланарні. □

За цим висновком граф Петерсена непланарний, оскільки містить підграф, гомеоморфний непланарному $K_{3,3}$ (див. рис. 25).

Очевидно, що всі графи з 1, 2, 3 чи 4 вершинами планарні, а серед графів з 5 вершинами непланарний лише K_5. Розглянувши графи з 6 вершинами, негомеоморфні K_5, неважко переконатися, що найменшим (за включенням множин ребер) непланарним з них є $K_{3,3}$. І взагалі, аналіз непланарних графів з більшою кількістю вершин свідчить, що кожен з них містить підграф, гомеоморфний K_5 або $K_{3,3}$. Іншими словами, існування підграфа, гомеоморфного K_5 або $K_{3,3}$, є необхідною умовою непланарності. Отже, ці два графи є мінімальними (за відношенням "є підграфом") непланарними графами, причому інших мінімальних не існує.

Наведені неформальні міркування приводять до наступного твердження.

Теорема 46 (Понтрягіна-Куратовського). Граф планарний тоді й тільки тоді, коли не містить підграфа, гомеоморфного K_5 або $K_{3,3}$.

Розглянемо операцію стягування вершин. Нехай граф $G = (V, E)$ має ребро $e \in E$, $e = (v, w)$. *Операція стягування суміжних вершин* v і w полягає в тому, що з графа вилучаються вершини v і w, додається нова вершина $u \notin V$ і з'єднується ребрами з усіма вершинами, які були суміжні з вилученими. Таким чином, утворюється граф $G' = ((V \backslash \{v, w\}) \cup \{u\}, ((E \backslash (O(v) \cup O(w)) \cup \{(u, x) \mid (v, x) \in E \vee (w, x) \in E\})$. Степені всіх вершин у графі G' з множини V, що не були суміжні хоча б з однією з вилучених вершин, залишаються без змін, а степені вершин, що були суміжні з обома вилученими вершинами, зменшуються на 1.

Існує окремий випадок, у якому стягування вершин та підрозбиття ребра є взаємно оберненими операціями (з точністю до ізоморфізму). Якщо підрозбиття ребра (v, w) утворює ребра (v, u) і (w, u), то стягування кінців одного з них є оберненим до цього підрозбиття.

Кажуть, що *граф* G_1 *стягується до графа* G_2, якщо G_2 можна утворити з G_1 за скінченну кількість застосувань операції стягування вершин.

Теорема 47. Стягування суміжних вершин планарного графа перетворює його на планарний граф.

□ Формальне доведення цього інтуїтивно очевидного твердження досить громіздке, хоча неважко переконатися, що стягування суміжних вершин на рівні діаграм перетворює плоску карту на плоску. □

Висновок 47.1 (достатня умова непланарності). Граф, що містить підграф, який за допомогою операцій стягування може бути перетворений у K_5 або $K_{3,3}$, не є планарним.

 Кожен підграф планарного графа є планарним, операція стягування перетворює планарні графи на планарні. Звідси випливає, що стягування планарного графа не може утворити непланарний K_5 чи $K_{3,3}$, тому підграф і весь граф непланарні.

Наприклад, якщо в графі Петерсена стягнути вершини A і F, B і G, C і H, I і D, J і E, то утвориться граф, ізоморфний непланарному графу K_5.

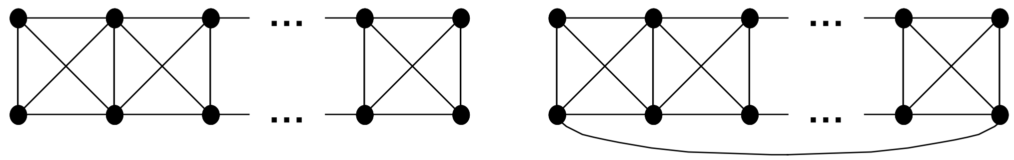
Існування в графі підграфа, який стягується до K_5 чи $K_{3,3}$, також є необхідною умовою непланарності графа. Отже, іншим критерієм планарності є наступна теорема.

Теорема 48 (Вагнера). Граф планарний тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфа, який стягується до K_5 чи $K_{3,3}$.

Як бачимо, K_5 чи $K_{3,3}$ є мінімальними непланарними графами й за відношенням "є результатом стягування".

Задачі

5.14. Для яких n графи з $2n$ вершинами, зображені на рис. 26, є планарними?



а) б)

Рис. 26. Два графи

5.15. Побудувати граф з 6 вершинами та 12 ребрами, який містить одночасно підграфи, гомеоморфні K_5 і $K_{3,3}$.

5.4. Максимальний плоский граф. Тріангуляція

Максимальним планарним графом називається планарний граф, який при додаванні до нього будь-якого ребра перестає бути планарним. Плоский зв'язний граф, кожна грань якого обмежена трикутником, називається *тріангуляцією*. Тут доводиться, що максимальними планарними графами є тріангуляції, і тільки вони.

Теорема 49. Для довільного $n \geq 3$ існує принаймні одна тріангуляція з n вершинами.

 Відповідну діаграму представлено на рис. 27.

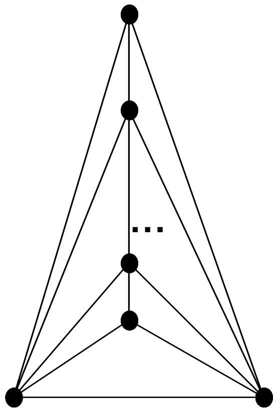


Рис. 27. Схема тріангуляції

Теорема 50. Кожен плоский граф, який має не менше 3 вершин і не є тріангуляцією, можна доповнити ребрами до тріангуляції.

□ Якщо плоский граф незв'язний, то його можна поповнити ребрами до плоского зв'язного графа, послідовно з'єднуючи ребрами компоненти зв'язності. Якщо отриманий зв'язний плоский граф не менше ніж з трьома вершинами не є тріангуляцією, то в ньому існує грань степеня не менше 4. Нехай суміжні ребра (v, u), (u, w), (w, t) ($v \neq w$, $u \neq t$) входять до межі грані степеня не менше 4. Оскільки граф плоский, то в ньому немає ребра (v, w) або ребра (u, t), нехай для визначеності немає ребра (v, w). Оскільки (v, u) і (u,w) — сусідні ребра однієї грані, ребро (v, w) можна додати до графа так, що він залишиться плоским. Описане додавання всіх можливих ребер утворює тріангуляцію. □

Теорема 51. Будь-яка тріангуляція з n вершинами ($n \geq 3$) містить $3n-6$ ребер і має $2n-4$ граней.

□ Нехай граф має m ребер. Оскільки степінь кожної грані дорівнює 3, за теоремою 42 маємо $2m = 3|P|$. За теоремою Ейлера $2m = 3|P| = 3(m-n+2)$, звідки $m = 3n$-6 і $|P| = 2n$-4. □

Теорема 52. Граф, що має не менше 3 вершин, є максимальним плоским графом тоді й тільки тоді, коли він є тріангуляцією.

□ (⇒) Якщо плоский граф не є тріангуляцією, то до нього можна додати ребра так, що він залишиться плоским.

(⇐) Якщо граф з n вершинами є тріангуляцією, то він має $3n$-6 ребер. Якщо додати хоча б одно ребро, кількість ребер стане більше $3n$-6, що неможливо для плоского графа згідно з висновком 44.3. Таким чином, тріангуляція є максимальним плоским графом. □

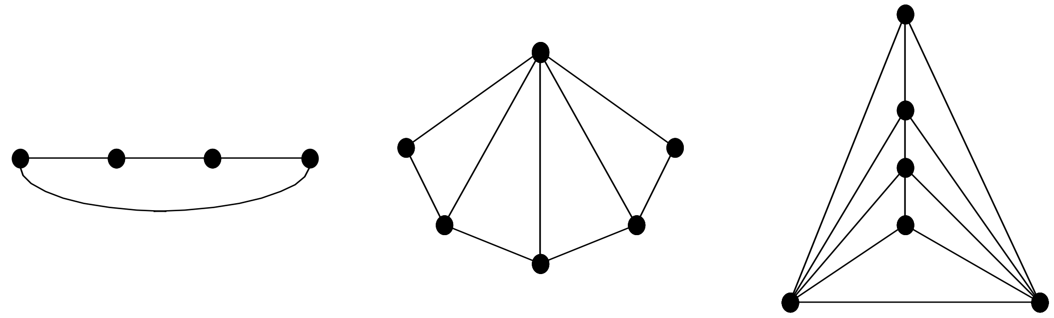
Висновок 52.1. Серед всіх плоских графів з n вершинами найбільшу кількість граней має тріангуляція.

□ За теоремою Ейлера найбільші можливі кількості ребер і граней для n-вершинного плоского графа досягаються одночасно. □

Задачі

5.16. Яку найбільшу кількість граней може мати плоский граф із 5 вершинами? Побудувати цей граф.

5.17. Чи можна до плоских графів, зображених на рис. 28, додати нові ребра так, щоб отриманий граф залишився плоским? Якщо можна, то які ребра і скільки?



а) б) в)

Рис. 28. Плоскі графи

5.18. Чи існує планарний граф, який має 8 вершин і 17 ребер?

5.19. Чи існує плоский граф, який має 6 вершин і 9 граней?

5.20. Довести, що в тріангуляції з n вершинами при $n \geq 4$ степінь кожної вершини не менше 3.

5.21. Довести, що в будь-якому планарному графі з n вершинами ($n \geq 4$) є принаймні чотири вершини, степені яких не більше 5.

5.22. Довести, що існує тільки одна (з точністю до ізоморфізму) тріангуляція з чотирьох вершин.

Відповіді та вказівки

5.1. Побудувати плоскі укладки графів, в яких вершини v_1 і v_2 належать зовнішній грані. **5.2.** Провести індукцію за кількістю точок зчленування. При додаванні кожного наступного блока переводити точку зчленування на зовнішню грань. **5.3.** Побудувати плоску карту дерева можна, наприклад, індукцією за кількістю вершин дерева. Дерево з n вершинами має єдину грань степеня $2(n\text{-}1)$. **5.4.** Побудувати кістяковий ліс (V, E_0) плоского графа; він має одну грань та k зв'язних компонент. Для нього $|E_0| = |V|–k$, тому $|V|–|E_0|+|P_0| = k+1$. Далі аналогічно доведенню теореми 44 послідовно додаємо решту ребер і одержуємо граф (V, E), для якого $|V|–|E|+|P| = k+1$. **5.5.** Не існує, оскільки $16>15 = 3\cdot7\text{-}6$, тобто не справджується необхідна умова планарності з висновку 44.3. **5.9.** Застосувати теорему 42 і теорему Ейлера. **5.10.** Якщо довжини всіх простих циклів не менше k, то степені всіх граней довільної плоскої карти графа також не менше k. Див. задачу 5.9. **5.14.** Принцип побудови плоскої карти для графа на рис. 26, *а* наведено на рис. 29. Граф на рис. 26, *б* планарний при $n = 1, 2, 3$. При $n \geq 4$ граф не є планарним, оскільки містить підграф, що стягується до $K_{3,3}$. Занумеруємо верхній ряд вершин графа зліва направо числами від 1 до n, а нижній — від $n+1$ до $2n$ також зліва направо. Тоді першу частку складатимуть вершини 1, 3, n+3, другу —

2, 4, n+2. Далі послідовно стягнемо вершини 1, n+1, 2n, 2n-1, …, n+5. **5.15.** $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}^{(2)} \setminus \{(1, 4)\} \cup \{(1, 6), (6, 4), (5, 6)\}$. *Вказівка*. {1, 2, 3, 4, 5} — вершини для K_5; {1, 5, 4} та {2, 3, 6} — частки для $K_{3,3}$. **5.16.** За висновком 52.1 граф є тріангуляцією; будується методом теореми 49. **5.18.** Існує. Тріангуляція з 8 вершинами має 18 ребер, вилучимо з неї одне ребро. **5.19.** Не існує. Максимальна кількість граней 6-вершинної тріангуляції — 8.

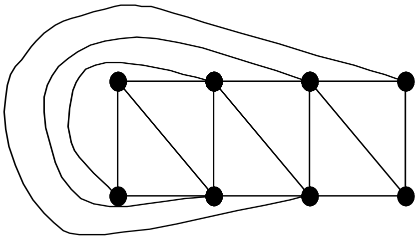


Рис. 29. Побудова плоскої карти

Розв’язання

5.6. Нехай графи G і $\overline{G}$ одночасно планарні. Якщо G має n вершин і m ребер, то $\overline{G}$ має n вершин і $n(n-1)/2-m$ ребер. За висновком 44.3 $m \le 3n-6$, $n(n-1)/2-m \le 3n-6$. Додамо ці нерівності: $n(n-1)/2 \le 6n-12$. Звідси $(n-\frac{13+\sqrt{73}}{2})(n-\frac{13-\sqrt{73}}{2}) \le 0$ (1). Але $10 < \frac{13+\sqrt{73}}{2} < 11$, тобто при $n \ge 11$ нерівність (1) не справджується, тому графи G і $\overline{G}$ одночасно планарними бути не можуть.

5.7. Нехай граф $G = (V, E)$ має n вершин і m ребер. Припустивши, що степені всіх вершин не менше 6, за теоремою 3 маємо $2m = \sum_{v \in V} \delta(v) \ge 6n$. Граф планарний, тому $m \le 3n-6$, тобто $m \le m-6$, що є суперечністю. Отже, припущення хибне й твердження задачі справджується.

5.8. Нехай у плоскому графі з n вершинами, m ребрами та k зв’язними компонентами всі вершини мають степінь не менше 3, а всі грані — не менше 6. За умовою та теоремою **3** маємо $2m \ge 3n$. За теоремою 42 та теоремою Ейлера маємо ще одну оцінку: $2m \ge 6|P| = 6(m-n+k+1)$. Звідси одержуємо суперечність $2m \ge 6m-6n+6k+6 \ge 6m-4m+6k+6 > 2m$.

5.11. Якщо граф має не більше двох ребер, то твердження очевидне. Якщо граф містить принаймні два ребра та три вершини і не має трикутників, то довільна його плоска карта має степені всіх граней не менше 4. Далі використати метод доведення висновку 44.3.

5.12. Довільний двочастковий граф не має циклів непарної довжини, тоді він не має трикутників. $K_{3,3}$ має 6 вершин і 9 ребер. Але $9 > 2{\cdot}6\text{-}4 = 8$, тому згідно з задачею 5.11 граф $K_{3,3}$ планарним бути не може.

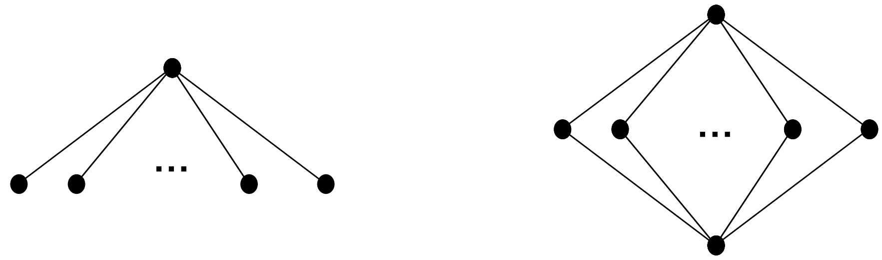
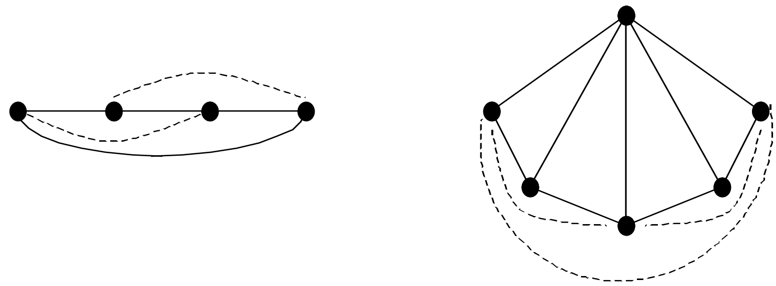


Рис. 30. Плоскі карти графів $K_{1,n}$ та $K_{2,n}$

5.13. Граф $K_{n,m}$ має $n+m$ вершин і nm ребер. Довільний двочастковий граф не містить циклів непарної довжини, тому не має трикутників. Згідно з задачею 5.11 необхідною умовою його планарності є $nm \le 2(n+m)$-4. Але $nm = (n-2)(m-2)+2m+2n-4 > 2(n+m)-4$ при $n \ge 3$ і $m \ge 3$. Звідси необхідно, щоб одна з часток мала не більше двох вершин. Ця умова є й достатньою — відповідні плоскі карти наведено на рис. 30.

5.17. Максимальний плоский граф є тріангуляцією, тому після додавання ребер повинно бути $3n$-6, де n — кількість вершин. До графа можна додати: а) (3·4-6)-4 = 2 ребра; б) (3·6-6)-9 = 3 ребра; в) (3·6-6)-12 = 0, тобто граф — тріангуляція, і додавання ребер утворить непланарний граф. Відповідні тріангуляції вказано на рис. 31, нові ребра відмічено пунктиром.



а) б)

Рис. 31. Дві тріангуляції

5.20. Тріангуляція за означенням є зв'язним графом, тому ізольованих вершин немає. Нехай в тріангуляції G з n ($n \ge 4$) вершинами є вершина v степеня 1 чи 2, яка суміжна, наприклад, з деякою вершиною w. Стягнемо вершини v і w. При цьому кількість вершин і ребер графа зменшиться рівно на одиницю і ми отримаємо планарний граф з n-1 вершиною і $3n$-7 ребрами, оскільки кількість ребер тріангуляції дорівнює $3n$-6. За висновком 44.3 для отриманого графа повинно справджуватись $3n-7 \le 3(n-1)-6 = 3n-9$, що неможливо. Звідси вершин степеня 1 та 2 в тріангуляції бути не може.

5.21. Розглянемо плоский граф, ізоморфний даному. Згідно з теоремою 50 його можна доповнити ребрами до тріангуляції. При цьому кількість вершин не зміниться і, можливо, збільшаться степені деяких вершин. Якщо побудована тріангуляція має принаймні чотири вершини, степені яких не більше 5, то ці самі вершини справджують твердження для нашого графа. Таким чином, достатньо довести твердження для тріангуляції.

Нехай тріангуляція $G = (V, E)$ має n вершин і m ребер, n_k — кількість вершин графа степеня k. Згідно з задачею 5.20 кожна вершина має степінь не менше 3. За теоремою 3 $2m = \sum_{v \in V} \delta(v) \geq 3n_3+4n_4+5n_5+6(n-(n_3+n_4+n_5)) \geq 6n-3(n_3+n_4+n_5)$; з іншого боку, для тріангуляції $m = 3n-6$, звідки $6n-12 \geq 6n-3(n_3+n_4+n_5)$, і $n_3+n_4+n_5 \geq 4$, що й треба було довести.

5.22. За теоремою 49 така тріангуляція (V, E) існує. Для неї $|E| = 3|V|-6 = 3\cdot4-6 = 6 = 4\cdot3/2$, тому вона є повним графом, єдиним з точністю до ізоморфізму.

Глава 6. Розфарбування

6.1. Хроматичне число графа

Нехай $N_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Відображення $f: V \to N_k$ називається *розфарбуванням* графа $G = (V, E)$; для кожної $v \in V$ число $f(v)$ називається *кольором* (*фарбою* або *номером фарби*). Розфарбування f графа G називається *правильним*, якщо $(v, w) \in E \Rightarrow f(v) \neq f(w)$, тобто довільні дві суміжні вершини мають різні кольори.

Мінімальна кількість фарб, для якої існує правильне розфарбування графа G, називається (*вершинним*) *хроматичним числом* графа G й позначається $\chi(G)$. Відповідне розфарбування називається *мінімальним*. До побудови правильного розфарбування та хроматичного числа можуть бути зведені такі практичні задачі, як задача складання розкладу, задача розподілу устаткування, задача проектування трансмісії та деякі інші.

Хроматичне число порожнього графа дорівнює 1. Якщо граф має хоча б одне ребро, його хроматичне число не менше 2. Очевидно, що для довільного підграфа H графа G справджується нерівність $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Теорема 53. Хроматичне число графа дорівнює найбільшому з хроматичних чисел його зв'язних компонент.

□ Якщо для розфарбування кожної зв'язної компоненти достатньо k фарб, то й для розфарбування всіх зв'язних компонент достатньо k фарб.□

Теорема 54. Якщо в графі G вершина v має степінь k і граф G-v можна правильно розфарбувати в $k' > k$ кольорів, то граф G можна правильно розфарбувати в k' кольорів.

□ Нехай вершини графа G-v можна правильно розфарбувати в k' кольорів. Вершина v має k суміжних вершин, тому серед k' кольорів є хоча б один, у який не пофарбовано вершини, суміжні з v. Пофарбуємо її в цей колір і одержимо правильне розфарбування всього графа в k' фарб. □

Висновок 54.1. Якщо в графі G вершина v має степінь k і $\chi(G\text{-}v) > k$, то $\chi(G) = \chi(G\text{-}v)$.

□ За теоремою $\chi(G) \leq \chi(G\text{-}v)$. Але $G\text{-}v \subseteq G$, тому $\chi(G\text{-}v) \leq \chi(G)$, і $\chi(G) = \chi(G\text{-}v)$. □

Висновок 54.2. Якщо $\Delta(G)$ — найбільший зі степенів вершин графа G, то $\chi(G) \leq 1+\Delta(G)$.

□ Застосуємо індукцію за кількістю вершин. Якщо граф має одну чи дві вершини, твердження очевидне. Нехай для всіх графів, кількість вершин у яких дорівнює n ($n \geq 1$), твердження справджується. Розглянемо граф G з n+1 вершиною й вилучимо з нього довільну вершину v. Одержимо граф G-v, у якому $\Delta(G\text{-}v) \leq \Delta(G)$. Згідно з припущенням індукції для його розфарбування достатньо $1+\Delta(G)$ фарб. Оскільки $\delta(v) \leq \Delta(G) < 1+\Delta(G)$, за теоремою граф G можна правильно розфарбувати не більш як $1+\Delta(G)$ фарбами. За принципом математичної індукції твердження доведено. □

Задачі

6.1. Визначити хроматичне число:

а) повного графа K_n;

б) повного двочасткового графа $K_{n,m}$;

в) довільного двочасткового графа;

г) простого циклу довжини $2k$, $k \in N$;

д) простого циклу довжини $2k+1$, $k \in N$;

е) дерева.

6.2. Чому дорівнює хроматичне число повного графа K_n, з якого вилучено одне ребро?

6.3. Довести, що для кожного неповного графа існує правильне розфарбування, при якому принаймні дві вершини графа пофарбовано в один колір.

6.4. Знайти графи, які мають різні хроматичні числа і в яких:

а) кількість вершин степеня k однакова для всіх $k \geq 0$;

б) кількість простих циклів довжини l однакова для всіх l;

в) виконуються обидві умови з пунктів *а* і *б*.

6.5. Довести, що хроматичне число непорожнього графа G дорівнює 2 тоді й тільки тоді, коли граф G не містить циклів непарної довжини.

6.6. Довести, що хроматичне число зв'язного плоского нетривіального графа дорівнює 2 тоді й тільки тоді, коли степені всіх його граней парні.

6.7. Довести, що хроматичне число графа дорівнює найбільшому з хроматичних чисел його блоків.

6.8. Довести, що для правильного розфарбування довільного кубічного графа достатньо чотирьох фарб.

6.9. Довести, що довільний планарний граф можна правильно розфарбувати не більш ніж у шість кольорів.

6.10. Нехай l — довжина максимального простого ланцюга в графі G. Довести, що $\chi(G) \leq l+1$.

6.11. Довести, що якщо будь-які два цикли непарної довжини в графі G мають спільну вершину, то $\chi(G) \leq 5$.

6.2. Гіпотеза чотирьох фарб та теорема про п'ять фарб для планарних графів

Гіпотеза чотирьох фарб пов'язана з розфарбуванням політичних географічних карт. Вважається, що територія кожної країни є зв'язною областю, а суміжні країни мають спільну межу у вигляді лінії (а не однієї спільної точки). Території суміжних країн фарбуються в різні кольори. Гіпотеза полягає в тому, що для будь-якої карти достатньо чотирьох фарб.

Ця гіпотеза має еквівалентне формулювання в термінах графів. Областям карти відповідають вершини графа, їх межам — ребра. Очевидно, що цей граф плоский. Таким чином, гіпотеза чотирьох фарб полягає в існуванні правильного розфарбування вершин довільного планарного графа не більш ніж у чотири кольори.

Ця гіпотеза (для карт) з’явилася ще в середині 19-го століття. Її непрямо підтверджує час (більше століття), протягом якого численні спроби побудувати контрприклади залишалися марними. Гіпотезу чотирьох фарб доведено для окремих класів графів, наприклад, для графів, що мають не більше 41 вершини. В 1969 році Х.Хеєш звів проблему чотирьох красок до дослідження великої, але скінченної множини графів. Пізніше кількість графів цієї множини було зведено до 1482 і вже в 1976 році колективу математиків і программістів під керівництвом К.Аппеля і В.Хейкена за допомогою ЕОМ вдалося розфарбувати всі ці графи. У 1996 році Н.Робертсон, Д.Сендерс, П.Сеймур, Р.Томас запропонували нове, простіше доведення гіпотези чотирьох фарб, але знову з використанням комп’ютера. Проте з повною мірою математичної строгості її не доведено, оскільки, наприклад, не доведено коректність компілятора та коректність виконання побудованого програмного коду, за допомогою якого будувалося розфарбування, крім того, і зведення загального випадку до перебору скінченної множини графів, і розфарбування останніх складно повторити.

Обмежимося більш слабким результатом (його одержав Хейвуд у 1890-му році).

Теорема 55 (про 5 фарб). Для правильного розфарбування довільного планарного графа достатньо п’яти фарб.

 Оскільки ізоморфні графи мають однакові хроматичні числа, то твердження достатньо довести для плоских графів. Застосуємо індукцію за кількістю вершин. Будь-який плоский граф не більш ніж з 5 вершинами можна правильно розфарбувати у 5 фарб.

Припущення індукції: всі плоскі графи з n ($n \geq 5$) вершинами можна розфарбувати у 5 фарб. Нехай $G = (V, E)$ —плоский граф з n+1 вершиною. У будь-якому планарному графі існує вершина v степеня не більше 5 (задача **5.7**). Граф G-v має n вершин, тому його можна правильно розфарбувати фарбами 1, 2, 3, 4, 5. Нехай це розфарбування задається функцією $f: V\setminus\{v\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Якщо деякий колір i (від 1 до 5) не застосовується для вершин, суміжних із v, візьмемо $f(v) = i$, що залишить розфарбування графа правильним.

Нехай $\delta(v) = 5$ і вершини v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, суміжні з v, пофарбовано в усі 5 кольорів, тобто $f(v_i) = i$ (i = 1, 2, 3, 4, 5). Нехай вершини розташовано на площині так, як указано на рис. 32.

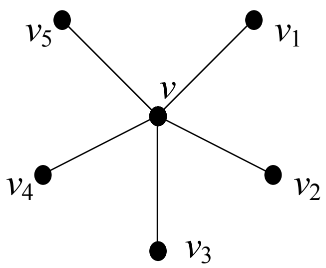


Рис. 32. Вершина v та п'ять суміжних із нею

Нехай $V_i = \{x \mid x \in V \setminus \{v\} \wedge f(x) = i\}$ — множина вершин, пофарбованих i-ю фарбою. Розглянемо $G_{13} = G(V_1 \cup V_3)$ — підграф графа G, визначений множиною вершин $V_1 \cup V_3$.

Якщо вершини v_1 і v_3 належать різним компонентам зв'язності графа G_{13}, то в компоненті, яка містить v_3, міняємо місцями кольори 1 і 3. Отримаємо нову функцію f_1 правильного розфарбування, для якої $f_1(v_1) = f_1(v_3) = 1$, $f_1(v_i) = i$, $i = 2, 4, 5$. Покладемо $f_1(v) = 3$ і одержимо правильне розфарбування f_1 всього графа у 5 фарб.

Якщо вершини v_1 і v_3 зв'язані в G_{13}, то простий ланцюг, що їх з'єднує, складається лише з вершин кольорів 1 і 3. Цей ланцюг разом з ланцюгом (v_1, v, v_3) дає простий цикл, що обов'язково оточує одну з вершин v_2 чи v_4. В такому разі вершини v_2 і v_4 не можна з'єднати простим ланцюгом, що містить тільки вершини кольорів 2 і 4. Тоді в графі $G_{24} = G(V_2 \cup V_4)$ вершини v_2 і v_4 належать різним компонентам зв'язності. Тоді в компоненті графа G_{24}, що містить вершину v_4, міняємо місцями кольори 2 і 4, утворюючи нову функцію f_1 правильного фарбування, для якої $f_1(v_2) = f_1(v_4) = 2$, $f_1(v_i) = i$, $i = 1, 3, 5$. Покладемо $f_1(v) = 4$ і одержимо правильне розфарбування f_1 всього графа у 5 фарб. За принципом індукції твердження доведено. □

6.3. Критичні графи

Граф G називається *критичним*, якщо в результаті вилучення будь-якої вершини з G утворюється граф G', хроматичне число якого строго менше $\chi(G)$. Критичний граф G, для якого $\chi(G) = k$, називається k-*критичним*.

Задачі

6.12. Довести, що довільний критичний граф є зв'язним.

6.13. Довести, що будь-який повний граф є критичним.

6.14. Довести, що простий цикл C_n є критичним графом тоді й тільки тоді, коли кількість його вершин n непарна.

6.15. Довести, що степені всіх вершин k-критичного графа G не менше $k-1$.

6.16. Довести, що граф 3-критичний тоді й тільки тоді, коли він є простим циклом непарної довжини.

Відповіді та вказівки

6.1. а) n. У повному графі всі вершини попарно суміжні. б) 2. Вершини одної частки фарбуються в колір 1, іншої — у колір 2. Одної фарби недостатньо, оскільки граф має принаймні одне ребро; в) Якщо граф не має ребер, хроматичне число дорівнює 1, інакше 2. г) 2. Вершини фарбуються в кольори 1 і 2 через одну. д) 3. Нехай $v_1, \ldots, v_{2k+1}, v_1$ — цикл непарної довжини. Якщо вершини $v_1, \ldots, v_{2k+1}$ розфарбувати в два кольори (п. *г*), суміжні v_1 і v_{2k+1} матимуть той самий колір. е) Якщо граф не має ребер, хроматичне число дорівнює 1, інакше — 2. Дерево є двочастковим графом (див. п. *в*). **6.2.** n-1. **6.3.** Хроматичне число підграфа не більше хроматичного числа графа. Тоді згідно з задачею 6.2 хроматичне число неповного n-вершинного графа не більше n-1, тобто при довільному правильному мінімальному розфарбуванні є принаймні дві вершини одного кольору. **6.4.** а) Один граф має зв'язні компоненти C_5, C_3, інший — C_4, C_4. б), в) З умови щодо кількості простих циклів випливає, що хоча б один із графів повинен мати хроматичне число не менше 4. Розглянути графи, що складаються з таких зв'язних компонент: K_4, P_{10} та K'_4, K'_4, C_4, P_2, де K'_4 — це K_4 без одного ребра. **6.7.** Провести індукцію за кількістю точок зчленування. **6.8.** Використати висновок 54.2. **6.9.** У планарному графі є принаймні одна вершина степеня не більше 5 (задача 5.7). Використовуючи індукцію за кількістю вершин, вилучимо цю вершину, розфарбуємо залишок графа у 6 кольорів і застосуємо висновок 54.2. **6.12.** За теоремою 53 хроматичне число графа дорівнює максимальному з хроматичних чисел його зв'язних компонент, тому незв'язність суперечить критичності. **6.15.** Якщо в k-критичному графі G вершина v має степінь $\delta(v) \le k$-2, то вилучимо її з графа. При цьому отримаємо граф G-v, для якого $\chi(G\text{-}v) < \chi(G) = k$, звідки $\chi(G\text{-}v) \le k$-1. Далі для отримання суперечності використати висновок 54.2.

Розв'язання

6.2. Даний граф містить підграф K_{n-1} з хроматичним числом n-1 і ще одну вершину v, яка відсутня в K_{n-1} й суміжна з n-2 вершинами з K_{n-1}. Серед n-1 кольора у K_{n-1} є колір, в який пофарбовано вершину, несуміжну з v; у цей колір можна правильно пофарбувати v.

6.5. ($\Rightarrow$) Хроматичне число графа не менше хроматичного числа довільного його підграфа, а хроматичне число циклу непарної довжини дорівнює 3 (задача 6.1), тому циклів непарної довжини в графі бути не може.

($\Leftarrow$) Якщо в графі немає циклів непарної довжини, він двочастковий (задача 2.7). Далі застосовуємо задачу 6.1.

6.6. ($\Rightarrow$) Якщо хроматичне число графа дорівнює 2, то граф не має циклів непарної довжини (задача 6.4). Тоді (задача 2.5) всі замкнені маршрути також мають парну довжину. Оскільки у зв'язному плоскому графі грані обмежено замкненими маршрутами, всі грані мають парний степінь.

($\Leftarrow$) Нехай степені всіх граней парні. Доведемо індукцією за кількістю граней, що хроматичне число графа дорівнює 2.

Якщо в графі одна грань, він ациклічний, і кожна компонента зв'язності є деревом. Дерево є двочастковим графом, граф нетривіальний, тому він має хроматичне число 2.

Нехай твердження справджується для довільного зв'язного плоского графа, що має не більше p ($p \ge 1$) граней. Розглянемо зв'язний плоский граф G з p+1 гранню парного степеня. Розглянемо дві грані степенів n_1 і n_2, до спільної межі яких входить ребро $e = (v, w)$. Вилучивши e, одержимо зв'язний непорожній граф з p гранями (об'єднуються дві сусідні грані, з межі яких вилучено ребро). Межа нової грані складена залишками меж двох старих граней, тому нова грань має степінь

n_1-1+n_2-1 = n_1+n_2-2. За умовою n_1 і n_2 як степені граней парні, тому нова грань також має парний степінь, а степені інших граней не змінюються.

За припущенням індукції хроматичне число одержаного графа дорівнює 2 і його можна правильно розфарбувати в два кольори. Оскільки n_1 і n_2 парні, вершини v і w лежать на непарній відстані (за маршрутом, що обмежує нову грань) одна від одної. Це означає, що вершини v й w мають різні кольори, і додавання ребра між ними залишає розфарбування правильним. Згідно з принципом трансфінітної індукції твердження доведено.

6.10. Застосуємо індукцію за кількістю n вершин графа. При $n = 1$ твердження очевидне. Нехай воно справджується для всіх графів з n вершинами, $n \geq 1$. Розглянемо довільний граф G з n+1 вершиною і його максимальний простий ланцюг $L = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$. За теоремою 23 вершина v_0 не суміжна з жодною вершиною, що не входить до складу L, і $\delta(v_0) \leq l$. Граф G-v_0 має n вершин і всі його максимальні прості ланцюги є простими ланцюгами в G, тому їх довжина l' задовольняє нерівності $l' \leq l$. За припущенням індукції $\chi(G\text{-}v_0) \leq l'+1$, звідки $\chi(G\text{-}v_0) \leq l+1$. Таким чином, для G-v_0 існує правильне розфарбування в l+1 колір, і за теоремою 54 граф G також можна розфарбувати в l+1 колір, тобто $\chi(G) \leq l+1$. Згідно з принципом трансфінітної індукції твердження доведено.

6.11. Серед циклів непарної довжини, які попарно мають спільні вершини, є простий цикл мінімальної непарної довжини. Вилучимо всі його вершини, спільні з іншими циклами непарної довжини. Залишаться цикли лише парної довжини. Для їх правильного розфарбування достатньо двох фарб. Вилучені вершини утворюють простий цикл мінімальної непарної довжини, тому між ними є ребра лише цього циклу. Фарбуємо вершини циклу в інші три фарби й одержуємо правильне розфарбування графа у 5 фарб.

6.13. $\chi(K_n) = n$, $K_n\text{-}v = K_{n\text{-}1}$, $\chi(K_{n\text{-}1}) = n\text{-}1 < n$.

6.14. $\chi(C_{2k}) = 2$, $\chi(C_{2k+1}) = 3$, $\chi(P_m) = 2$, $k \geq 1$, $m \geq 2$.

6.16. ($\Leftarrow$) Див. задачу 6.14.

($\Rightarrow$) За задачею 6.12 3-критичний граф G повинен бути зв'язним. Оскільки двочастковий граф можна розфарбувати в 2 кольори, він не є 3-критичним. Таким чином, 3-критичний граф повинен містити простий цикл непарної довжини (задачі 2.4 та 2.7). Зафіксуємо один такий цикл. Якщо існує вершина, яка не входить до складу цього циклу, то після її вилучення залишиться граф з простим циклом непарної довжини і хроматичним числом 3, що суперечить критичності початкового графа. Звідси всі вершини 3-критичного графа повинні входити до складу деякого простого циклу непарної довжини, тобто ним є цикл (v_1, v_2, …, v_{2n+1}, v_1), що проходить через усі вершини графа. Доведемо, що інших ребер немає.

Нехай існує ребро e, що не входить у даний цикл. Без обмеження загальності можна вважати, що $e = (v_1, v_i)$, $i > 2$. Вершини v_1 і v_i розбивають цикл на дві частини (v_1, v_2, …, v_i) та (v_i, …, v_{2n+1}, v_1). Одна з них має непарну довжину, а інша — парну, причому кожна частина має принаймні одну вершину, відмінну від v_1 і v_i. Якщо i

парне, то простий цикл (v_1, v_i, …, v_{2n+1}, v_1) має непарну довжину й залишається в графі після вилучення v_2. Тоді $\chi(G\text{-}v_2) = 3$, що суперечить 3-критичності графа. За непарного i у графі після вилучення v_{2n+1} залишається простий цикл (v_1, v_2, …, v_i, v_1) непарної довжини, і знову $\chi(G\text{-}v_{2n+1}) = 3$.

Отже, ребра, яке б не входило до простого циклу (v_1, v_2, …, v_{2n+1}, v_1), не існує, тому граф є простим циклом непарної довжини.

Глава 7. Орієнтовані графи

7.1. Модель орграфа.

Для повноти викладення почнемо з означень, які вже були наведені раніше. Нехай V — непорожня скінченна множина, а E — довільна підмножина другого декартового степеня множини вершин, тобто $E \subseteq V \times V$. Пара (V, E) називається *орієнтованим графом*, чи *орграфом*, елементи множини V — *вершинами*, або *вузлами*, а елементи множини E — *орієнтованими ребрами*, або *дугами*. Дуги (v, w) і (w, v) орграфа називаються *симетричними*. Орграф, що не має пар симетричних дуг, називається *направленим*. Кожну пару симетричних дуг між різними вершинами v та w можна розглядати як одне неорієнтоване ребро $\{v, w\}$. Дуга вигляду (v, v) називається *петлею*. Надалі під орграфом будемо розуміти орграф без петель. Таким чином, за означенням в орієнтованому графі немає петель та кратних дуг.

Повернемось тепер до нашого прикладу турніра між чотирма футбольними командами, в якому кожні дві команди зіграли між собою не більше одного матчу. Так само цей турнір можна подати орграфом, вершинами якого є команди. Якщо дві команди зіграли між собою матч, з'єднаємо відповідні вершини дугою ребром, що веде від команди-переможця до програвшої команди. Якщо дві команди зіграли у нічию, проведемо дві симетричні дуги. Так в футбольному турнірі, представленому в графі з рис. 33, команди "Динамо" та "Шахтар" зіграли у нічию, а "Динамо" виграло у "Спартака".

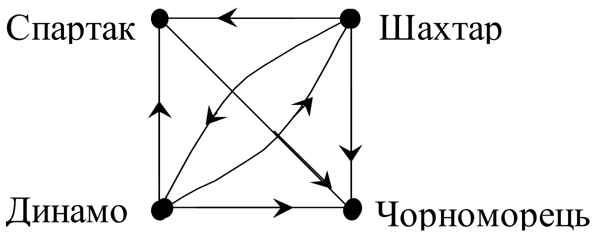


Рис. 33. Орграф для подання турніра

Означення підграфа, надграфа, суграфа, об'єднання, перетина, різниці, прямої суми, доповнення, віднімання вершини й дуги (орієнтованого ребра), а також ізоморфізму (див. попередні розділи), можуть бути поширені на орграфи без змін.

7.1.1. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини

Нехай $G = (V, E)$ — орграф, $e \in E$ — дуга. Кажуть, що дуга $e = (v, w)$ веде з вершини v у вершину w, а вершини v і w є кінцевими вершинами дуги (v, w). При цьому вершину v називають *початком* дуги (v, w), w — *кінцем*, v — суміжною *до* w, а w — суміжна *із* v. Кожна дуга інцидентна своїм кінцевим вершинам. Дві різні дуги, інцидентні одній і тій самій вершині, називаються *суміжними*.

Півстепенем виходу $\delta^{+}(v)$ вершини v називається кількість вершин, суміжних *із* v, тобто, кількість ребер, що виходять з вершини v; *півстепенем входу* $\delta^{-}(v)$ —

суміжних *до* v, тобто кількість ребер, які входять у v. *Степенем* вершини v називається кількість дуг, інцидентних v, і позначається $\delta(v)$. Оскільки розглядаються орграфи без петель, з цих означень випливає наступне твердження.

Теорема 56. Для будь-якої вершини v орграфа справджується рівність $\delta(v) = \delta^+(v)+\delta^-(v)$.

В орграфі з n вершинами півстепінь вершини може мати значення від 0 до n-1, а степінь — від 0 до 2(n-1).

Нехай є орграф $G = (V, E)$, де $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4), (2, 4), (2, 7), (3, 7), (4, 6), (5, 6), (6, 7), (7, 5)\}$. Його діаграму подано на рис. 34.

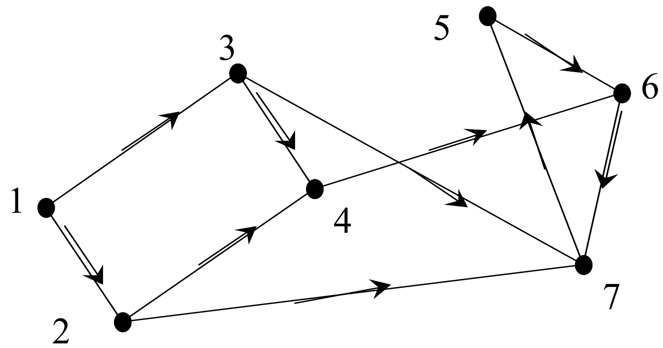


Рис. 34. Приклад орграфа для ілюстрації означень

Для цього графа вершина 2 є суміжною із вершиною 1 та суміжною до вершини 4. Обчислимо півстепені та степені вершин: $\delta^+(1) = 2$, $\delta^-(1) = 0$, $\delta^+(2) = 2$, $\delta^-(2) = 1$, $\delta^+(3) = 2$, $\delta^-(3) = 1$, $\delta^+(4) = 1$, $\delta^-(4) = 2$, $\delta^+(5) = 1$, $\delta^-(5) = 1$, $\delta^+(6) = 1$, $\delta^-(6) = 2$, $\delta^+(7) = 1$, $\delta^-(7) = 3$; $\delta(1) = 2$, $\delta(2) = 3$, $\delta(3) = 3$, $\delta(4) = 3$, $\delta(5) = 2$, $\delta(6) = 3$, $\delta(7) = 4$.

7.1.2. Обернений граф. Принцип орієнтованої двоїстості.

Орграфом, *оберненим* до даного орграфа $G = (V, E)$, називається орграф $G' = (V, E')$, де $E' = \{(w, v) \mid (v, w) \in E\}$. Іншими словами, орграф, обернений до орграфа G, одержується зміною орієнтації кожної дуги орграфа на протилежну (рис. 35). Для довільного орграфа G справджується очевидна рівність $G'' = G$, тобто орграф, обернений до оберненого, збігається з початковим орграфом.

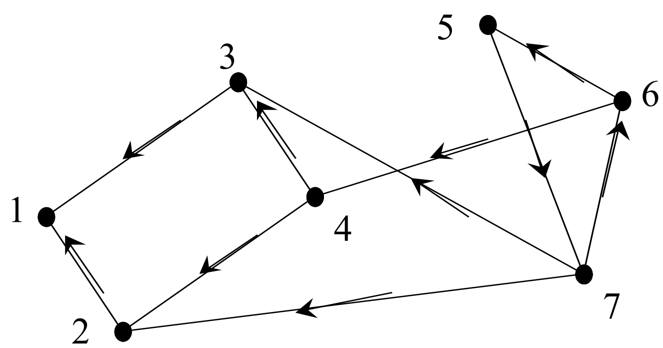


Рис. 35. Граф, обернений до графа на рис. 34

Нам уже знайомі такі “обернені” поняття, як півстепінь виходу та півстепінь входу. Відносно орієнтації всі поняття пов’язані між собою достатньо потужним принципом.

Принцип орієнтованої двоїстості. Для довільної теореми про орграфи можна сформулювати відповідну двоїсту теорему, замінивши кожне поняття на обернене до нього.

7.1.3. "Орлема про рукостискання"

У довільному орграфі кожна дуга має рівно один початок та рівно один кінець, тому справджується наступне твердження.

Теорема 57. Для довільного орграфа $G = (V, E)$ виконується

$$\sum_{v \in V} \delta^{+}(v) = \sum_{v \in V} \delta^{-}(v) = |E|.$$

Ця теорема є аналогом “леми про рукостискання” для неорієнтованих графів; її інколи називають “орлемою про рукостискання”.

Задачі

7.1. Довести, що для довільного орграфа $G= (V, E)$ справджується нерівність $|E| \leq |V|\cdot(|V|-1)$.

7.2. Маршрути в орграфах

7.2.1. Маршрути, шляхи, контури

Для орграфів маршрут означається аналогічно неорієнтованим графам. В орграфі $G = (V, E)$ послідовність вершин і дуг $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$, де $v_0, \ldots, v_n$ — вершини, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $1 \leq i \leq n$, —дуги, називається *(орієнтованим) маршрутом*. Дуги e_i та e_{i+1} $(1 \leq i \leq n-1)$ є *сусідніми* дугами маршруту й мають принаймні одну спільну вершину. Вказаний маршрут *веде* з v_0 у v_n. Цей маршрут можна позначити $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$, не вказуючи його дуги. Число n називається *довжиною маршруту*. Для систематичності міркувань вводиться *тривіальний*, або *нуль-маршрут* — маршрут, що складається з єдиної вершини й має довжину 0. Інші маршрути вважаються нетривіальними.

Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра попарно різні, і *простим ланцюгом*, або *шляхом*, якщо всі його вершини попарно різні.

Якщо $v_0 = v_n$, то маршрут називається *замкненим*, або *циклічним*. Для замкненого маршруту його остання та перша дуги вважаються сусідніми. *Кістяковий маршрут* містить всі вершини орграфа. Нетривіальний замкнений ланцюг називається *циклом*. Цикл $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ називається *простим*, або *контуром*, якщо його вершини $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n$ попарно різні. Зауважимо, що тривіальний маршрут є замкненим за означенням. На відміну від неорієнтованих графів, найменша можлива довжина контура дорівнює двом, наприклад, в орграфі $G = (\{1, 2\}, \{(1, 2), (2, 1)\})$ існує контур $(1, 2, 1)$ довжини 2. Цикл, що містить усі дуги орграфа, називається *ейлеровим*. Ланцюг, що містить усі дуги орграфа, також називається *ейлеровим*.

Граф, що не має контурів, називається *безконтурним*, або *ациклічним*. Зауважимо, що граф, обернений до безконтурного, є безконтурним.

Кожен маршрут є орієнтованим від своєї першої вершини до останньої. Для орграфів вводиться також поняття півмаршруту, який не має орієнтації й є аналогічним маршруту в графі. *Півмаршрутом* в орграфі називається послідовність вершин і дуг $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$, де $v_0, \ldots, v_n$ — вершини, але дугою e_i , $1 \le i \le n$, може бути як (v_{i-1}, v_i), так і (v_i, v_{i-1}). *Півшлях*, *півконтур* та інші поняття означаються аналогічно.

У графі на рис. 34 існує контур (5, 6, 7, 5), який одночасно є півконтуром, та півмаршрут (6, 7, 3), який не є маршрутом. Також у цьому графі існують шляхи (1, 3, 4, 6, 7) та (1, 2, 7), що ведуть з вершини 1 в вершину 7.

Як і для неорієнтованих графів, якщо $Z_1 = (v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i)$ і $Z_2 = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ — маршрути (півмаршрути), то під $Z_1 \cdot Z_2$ розуміється маршрут (півмаршрут) $(v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, а під Z_1^{-1} — півмаршрут $(v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1, v_0)$.

Задачі

7.2. Довести, що в орграфі будь-який маршрут, який веде з вершини v у вершину w $(v \ne w)$, містить шлях, що веде з v у w.

7.3. Довести, що в орграфі будь-який нетривіальний замкнений маршрут містить контур.

7.4. Довести, що в орграфі будь-яка дуга замкненого маршруту належить деякому контуру, що міститься в цьому маршруті.

7.5. Навести приклад орграфа, жоден цикл якого не є кістяковим маршрутом, але сам орграф має кістяковий замкнений маршрут.

7.2.2. Досяжність вершин. Відстань між вершинами

Якщо існує шлях з вершини v у вершину w, то кажуть, що вершина w *досяжна з* вершини v; *відстанню* $d(v, w)$ від вершини v до вершини w називається довжина такого найкоротшого шляху. Кожна вершина вважається досяжною з самої себе. Якщо вершина w недосяжна з вершини v, то цей факт інколи позначають так: $d(v,w) = \infty$.

У графі на рис. 34 шлях (1, 2, 7) веде з 1 у 7 і є найкоротшим таким шляхом, тому $d(1, 7) = 2$. Але жоден маршрут не веде з 7 у 1, тобто вершина 1 не є досяжною з вершини 7, і $d(7, 1) = \infty$. Звідси зрозуміло, що відношення на множині вершин орграфа "є досяжною з" в загальному випадку не є симетричним. Крім того, $d(7, 5) = 1$ і $d(5, 7) = 2$. Таким чином, відстань між вершинами орграфа не задовольняє аксіомі симетричності метрики і не є метрикою.

Вершини v і w називаються *взаємно досяжними*, якщо w досяжна з v, а v — з w.

Задачі

7.6. Нехай в орграфі вершина u є досяжною з вершини v, а w — з u. Довести, що w є досяжною з v.

7.7. Довести, що в орграфі вершини v і w є взаємно досяжними тоді й тільки тоді, коли вони обидві належать деякому замкненому маршруту орграфа.

7.8. Довести, що коли в орграфі вершина u є досяжною з вершини v, а w — з u, то $d(v, u)+d(u, w) \geq d(v, u)$.

7.2.3. Класифікація вершин орграфа

Вершина, з якої недосяжна жодна інша вершина орграфа, називається *тупиковою*. Згідно з означенням, з тупикової вершини не виходить жодного ребра, тому має місце наступна теорема.

Теорема 58. Вершина орграфа є тупиковою тоді й тільки тоді, коли вона має нульовий півстепінь виходу.

Вершина, яка не є досяжною з довільної іншої вершини орграфа, називається *недосяжною*. Поняття недосяжної та тупикової вершини також є оберненими поняттями. Згідно з принципом оберненої двоїстості маємо теорему, аналогічну попередній.

Теорема 59. Вершина орграфа є недосяжною тоді й тільки тоді, коли вона має нульовий півстепінь входу.

У графі на рис. 34 вершина 1 є недосяжною, а на рис. 35 вершина 1 є тупиковою.

Існують типи вершин, протилежні до тупикових та недосяжних. *Джерелом* в орграфі називають вершину, з якої досяжна будь-яка вершина орграфа. *Стік* визначається двоїстим чином: *стоком* у орграфі називають вершину, яка досяжна з будь-якої вершини орграфа. Наприклад, у графі на рис. 34 вершина 1 є джерелом, а вершини 5, 6, 7 — стоками.

Задачі

7.9. Довести, що орграф, який не містить тупикових вершин, має принаймні один контур.

7.10. Довести, що в безконтурному орграфі існує хоча б одна тупикова вершина.

7.11. Довести, що орграф, який не містить недосяжних вершин, має принаймні один контур.

7.12. Довести, що в безконтурному орграфі завжди існує хоча б одна недосяжна вершина.

7.13. Довести, що в безконтурному орграфі існує не більше одного джерела.

7.14. Довести, що в безконтурному орграфі існує не більше одного стоку.

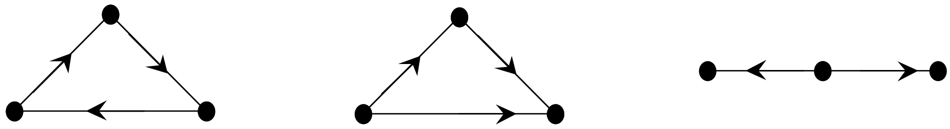
7.15. Довести, що якщо в орграфі з джерелом існує недосяжна вершина, то вона збігається з джерелом.

7.16. Довести, що якщо в орграфі зі стоком існує тупикова вершина, то вона збігається зі стоком.

7.17. Довести, що тупикові та недосяжні вершини орграфа не входять до складу жодного нетривіального замкненого маршруту.

7.2.4. Типи зв'язності

Поняття зв'язності для орграфів означається у три різних способи. Орграф називається *сильно зв'язним*, або *сильним*, якщо дві довільні його вершини є взаємно досяжними; *однобічно зв'язним*, або *однобічним*, якщо для довільних двох його вершин принаймні одна є досяжною з іншої; *слабо зв'язним*, або *слабким*, якщо довільні дві його вершини можна з'єднати півмаршрутом. Зрозуміло, що кожен сильний орграф є однобічним, а однобічний — слабким, але зворотні твердження в загальному випадку хибні. Наприклад, орграф на рис. 36, *а* є сильним, на рис. 36, *б* є однобічно, але не сильно зв'язним; приклад слабкого, але не однобічного орграфа наведено на рис. 36, *в*. Орграф на рис. 34 також є прикладом слабкого, але не однобічного орграфа.



а) б) в)

Рис. 36. Різні типи зв'язності графів

Орграф називається *незв'язним*, якщо він не є слабо зв'язним. У незв'язному орграфі не має ні стоків, ні джерел.

Для орграфів означено три типи компонент зв'язності. *Сильною компонентою* орграфа називається максимальний сильно зв'язний підграф, *однобічною* — максимальний однобічний і *слабкою* — максимальний слабкий підграф.

Неорієнтований мультиграф, який отримується в результаті зняття орієнтації з дуг орграфа G, називається *основою* орграфа G. Орграф є слабо зв'язним тоді й тільки тоді, коли його основа — зв'язний мультиграф. (Поняття зв'язності для мультиграфів означається аналогічно зв'язності неорієнтованих графів.)

Задачі

7.18. Довести, що орграф є сильно зв'язним тоді й тільки тоді, коли в ньому є кістяковий замкнений маршрут.

7.19. Довести, що слабкий орграф є сильно зв'язним тоді й тільки тоді, коли у ньому є замкнений маршрут, що містить кожну дугу орграфа.

7.20. Довести, що орграф є сильно зв'язним тоді і тільки тоді, коли він слабо зв'язний і кожна його дуга належить деякому циклу.

7.21. Довести, що граф $G = (V, E)$ є сильно зв'язним тоді й тільки тоді, коли для будь-якого розбиття множини вершин V на дві підмножини V_1 і V_2 існує хоча б одна дуга $(v, w) \in E$ така, що $v \in V_1$ і $w \in V_2$, і хоча б одна дуга $(u, z) \in E$ така, що $u \in V_2$ і $z \in V_1$.

7.22. Довести, що в сильно зв'язному орграфі кожна вершина є джерелом.

7.23. Довести, що в сильно зв'язному орграфі кожна вершина є стоком.

7.24. Нехай орграф є слабо зв'язним, але не є однобічно зв'язним. Довести, що в ньому не існує такої вершини, після вилучення якої утворюється сильно зв'язний орграф.

7.25. Довести, що орграф є слабо зв'язним тоді й тільки тоді, коли в ньому є півмаршрут, що проходить через усі вершини.

7.26. Довести, що в однобічно зв'язному орграфі існує не більше однієї недосяжної вершини.

7.27. Довести, що в однобічно зв'язному орграфі існує не більше однієї тупикової вершини.

7.28. Довести, що орграф є однобічно зв'язним тоді й тільки тоді, коли в ньому є маршрут, що проходить через усі його вершини.

7.29. Довести, що слабо зв'язний орграф є ейлеровим тоді й тільки тоді, коли в будь-якої його вершини півстепінь виходу дорівнює півстепеню входу.

7.30. Довести, що слабо зв'язний орграф має ейлерів ланцюг тоді й тільки тоді, коли він має дві такі вершини v і w, що $\delta^+(v) = \delta^-(v)+1$ і $\delta^+(w) = \delta^-(w)-1$, а для всіх інших вершин u орграфа виконується $\delta^+(u) = \delta^-(u)$.

7.31. Довести, що слабо зв'язний орграф, в кожної вершини якого півстепінь виходу дорівнює півстепеню входу, є сильно зв'язним.

7.32. Довести, що слабо зв'язний орграф, який має дві такі вершини v і w, що $\delta^+(v) = \delta^-(v)+1$ і $\delta^+(w) = \delta^-(w)-1$, а для всіх інших його вершин u виконується $\delta^+(u) = \delta^-(u)$, є однобічно зв'язним.

7.33. Довести, що слабо зв'язний орграф з n вершинами має не менше $n-1$ дуги.

7.34. Довести, що однобічно зв'язний орграф з n вершинами має не менше $n-1$ дуги.

7.35. Довести, що сильно зв'язний орграф з n ($n \geq 2$) вершинами має не менше n дуг.

7.36. Довести, що орграф з n вершинами, що має більше $(n-1)^2$ дуг, є сильно зв'язним.

7.2.5. Безконтурні орграфи

Нумерацією орграфа $G = (V,E)$ з n вершинами називається взаємно однозначне відображення $f: V \to N_n$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність натуральне число $f(v)$ з множини $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Нумерація f орграфа $G = (V,E)$ називається *правильною*, або *топологічним сортуванням вершин* орграфа G, якщо для будь-якої дуги $(v, w) \in E$ виконується $f(v) < f(w)$.

Теорема 60. Для орграфа, що має принаймні один нетривіальний замкнений маршрут, правильної нумерації не існує.

□ Припустимо, що для орграфа $G = (V, E)$ існує правильна нумерація f і одночасно в ньому є нетривіальний замкнений марщрут $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$. За означенням правильної нумерації необхідно виконано $f(v_1) < f(v_2) < \ldots < f(v_n) < f(v_1)$, звідки одержується суперечність $f(v_1) < f(v_1)$.□

Теорема 61. Для безконтурного орграфа існує правильна нумерація.

□ Доведемо це твердження індукцією за кількістю вершин. Для всіх безконтурних графів з 1 чи 2 вершинами твердження справджується. Нехай воно має місце для всіх безконтурних орграфів з n ($n \geq 2$) вершинами. Розглянемо довільний безконтурний граф $G = (V, E)$ з $n+1$ вершиною. Згідно з задачею 7.10 він має принаймні одну тупикову вершину; нехай це вершина v. Розглянемо орграф G-v. Він має n вершин і є безконтурним. За припущенням індукції, для нього існує правильне сортування f_v. Відображення $f : V \rightarrow N_{n+1}$, для якого $f(w) = f_v(w)$ при $w \neq v$ і $f(v) = n+1$, є нумерацією орграфа G. Правильність цієї нумерації випливає з правильності нумерації f_v та того факту, що вершина v є тупиковою. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено. □

З попередніх двох теорем одержуємо наступну.

Теорема 62. Орграф є безконтурним тоді й тільки тоді, коли для нього існує правильна нумерація.

Кореневим, або *вихідним*, *деревом* називається орграф з джерелом, який не має півконтурів. Оберненим поняттям є *вхідне дерево* — орграф зі стоком, який не має півконтурів.

Задачі

7.37. Довести, що кореневе дерево має рівно одне джерело.

7.38. Довести, що вхідне дерево має рівно один стік.

7.39. Довести, що слабо зв'язний орграф є кореневим деревом тоді й тільки тоді, коли лише одна його вершина має нульовий півстепінь входу, а в усіх інших вершин півстепінь входу дорівнює 1.

7.40. Довести, що слабо зв'язний орграф є вхідним деревом тоді й тільки тоді, коли лише одна його вершина має нульовий півстепінь виходу, а в усіх інших вершин півстепінь виходу дорівнює 1.

7.2.6. Орієнтація графа

Орієнтацією графа G називається орграф, який одержується приписуванням деякої орієнтації кожному ребру графа G. При цьому граф G є основою своєї орієнтації.

Задачі

7.41. Довести, що для довільного графа існує ациклічна орієнтація.

7.42. Довести, що для довільного графа існує орієнтація така, що для будь-якої її вершини v виконується нерівність $|\delta^+(v) - \delta^-(v)| \leq 1$.

7.3. Турніри

Турніром, або *повним орграфом*, називається направлений орграф, у якому будь-які дві вершини інцидентні деякій дузі. Іншими словами, орграф є турніром тоді й тільки тоді, коли його основа є повним графом. Існує єдиний (з точністю до ізоморфізму) турнір з однією вершиною (рис. 37, *а*), єдиний турнір з двома вершинами (рис. 37, *б*) і два турніри з трьома вершинами (рис. 37, *в*, *г*). Турнір на рис. 37, *в* називається *транзитивною трійкою*, а турнір рис. 37, *г* — *циклічною трійкою*.

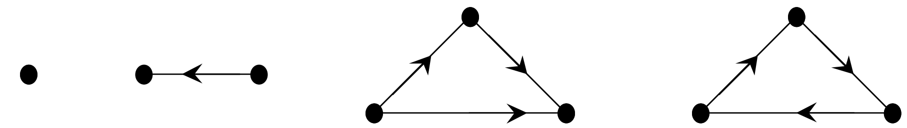


Рис. 37. Приклади турнірів

Відмітимо, що в результаті вилучення довільної вершини нетривіального турніра одержується турнір.

Теорема 63. Для будь-якої вершини v n-вершинного турніра $\delta^+(v)+\delta^-(v) = n-1$.

□ За теоремою 56 $\delta^+(v)+\delta^-(v) = \delta(v)$. Кожна вершина дугою з'єднана з довільною іншою вершиною турніра рівно однією дугою, тому $\delta(v) = n-1$, звідки $\delta^+(v)+\delta^-(v) = n-1$. □

Зауважимо, що теорема 63 дає лише необхідну, але не достатню умову того, щоб орграф був турніром. Відповідний приклад наведено на рис. 38.

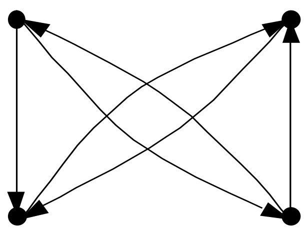


Рис. 38. Орграф, який не є турніром

Теорема 64. У турнірі існує шлях, який проходить через усі вершини орграфа.

□ Доведемо це твердження індукцією за кількістю вершин. Для турнірів, що мають одну чи дві вершини, шлях, який проходить через усі вершини орграфа, існує. Нехай твердження виконується для всіх турнірів, що мають n ($n \geq 2$) вершин. Розглянемо довільний турнір $G = (\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$ з $n+1$ вершиною. Орграф G-v_0 є n-вершинним турніром, тому за припущенням індукції в ньому існує шлях, що проходить через усі його вершини. Без обмеження загальності можна вважати, що це шлях $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Якщо для деякого натурального числа i, $1 \leq i \leq n-1$, виконується (v_i, v_0), $(v_0, v_{i+1}) \in E$, то $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_0, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n)$ — шлях у G. Інакше, оскільки G є турніром, виконується або $(v_0, v_1) \in E$, або $(v_1, v_0) \in E$. У першому випадку маршрут $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ є шуканим шляхом. У другому випадку виконано $(v_2, v_0) \in E$, $(v_3, v_0) \in E$, …, $(v_n, v_0) \in E$, але тоді маршрут $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_0)$ є шляхом в орграфі G. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено. □

Задачі

7.43. Довести, що для довільного турніра $G = (V, E)$ з n вершинами виконується $\sum_{v \in V} \delta^+(v) = n(n-1)/2$.

7.44. Довести, що для довільного турніра $G = (V, E)$ з n вершинами виконується $\sum_{v\in V} \delta^-(v) = n(n-1)/2$.

7.45. Довести, що для довільного турніра $G=(V,E)$ з n вершинами виконується $\sum_{v\in V} (\delta^-(v))^2 = \sum_{v\in V} (\delta^+(v))^2$.

7.46. Довести, що в турнірі завжди є джерело.

7.47. Довести, що в турнірі завжди є стік.

7.48. Довести, що в турнірі може бути не більше однієї недосяжної вершини.

7.49. Довести, що в турнірі може бути не більше однієї тупикової вершини.

7.50. Довести, що в турнірі відстань від вершини, яка має найбільший півстепінь виходу, до будь-якої іншої вершини турніра дорівнює або 1, або 2.

7.51. Довести, що в будь-якому турнірі існує гамільтонів ланцюг.

7.52. Довести, що турнір або є сильно зв'язним, або може бути перетворений у сильно зв'язний зміною орієнтації лише однієї дуги.

7.53. Довести, що коли з турніра з n вершинами ($n \geq 4$) вилучити будь-яку вершину, отримаємо або сильно зв'язний орграф, або орграф, який може бути перетворений у сильно зв'язний після додавання лише однієї відповідної дуги.

7.54. Довести, що коли в нетривіальному турнірі всі вершини мають попарно різні півстепені виходу, то орграф є безконтурним.

7.55. Довести, що коли в нетривіальному турнірі є принаймні дві вершини з однаковими півстепенями виходу, то в цьому орграфі знайдуться три вершини, які є вершинами трикутника.

7.56. Довести, що в будь-якому сильно зв'язному турнірі з n ($n \geq 3$) вершинами для довільної його вершини і кожного $k = 3, 4, \ldots, n$ існує контур довжини k, який містить цю вершину.

7.57. Довести, що у будь-якому сильно зв'язному турнірі з n ($n \geq 3$) вершинами для кожного $k = 3, 4, \ldots, n$ існує контур довжини k.

7.58. Довести, що турнір є сильним тоді й тільки тоді, коли він має контур, який проходить через усі його вершини.

7.59. Довести, що турнір є сильним тоді й тільки тоді, коли він є гамільтоновим.

7.60. Довести, що в сильному турнірі з n ($n \geq 4$) вершинами є принаймні дві вершини, після вилучення кожної з яких отримуємо сильно зв'язний орграф.

Відповіді та вказівки

7.1. Використати теорему 57. **7.2.** Див. доведення теореми 8. **7.3.** Див. доведення теореми 10. **7.4.** Оскільки розглядаються орграфи без петель, кожні дві сусідні дуги маршруту є різними. Далі див. доведення теореми 10, висновок 10.1 та доведення теореми 11. **7.5.** $G=(\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 1)\})$. **7.6.** За допомогою задачі 7.2 побудувати шлях із v в w. **7.8.** Використати задачу 7.6. **7.9.** Використати спосіб розв'язання задачі 2.3. **7.10.** Використати задачу 7.9. **7.11.** Твердження, двоїсте до задачі 7.9. **7.12.** Твердження, двоїсте до задачі 7.10.

7.14. Твердження, двоїсте до задачі 7.13. **7.16.** Твердження, двоїсте до задачі 7.15. **7.21**. Див. задачу 2.8. **7.22.** В ньому з кожної вершини досяжна довільна інша. **7.23.** Твердження, двоїсте до задачі 7.22. **7.25.** Див. задачу 7.18. **7.27.** Твердження, двоїсте до задачі 7.26. **7.29.** Доведення аналогічне доведенню теореми 20. **7.30.** Див. доведення висновку 20.1. **7.31.** Використати задачі 7.29 та 7.19. **7.32.** Використати задачі 7.30 та 7.28. **7.33.** Використати теорему 16. **7.34.** Використати теорему 16. **7.37.** Кореневе дерево є безконтурним орграфом; далі див. задачу 7.13. **7.38.** Твердження, двоїсте до задачі 7.37. **7.40.** Твердження, двоїсте до задачі 7.39. **7.41.** Для графа $G = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$ орграф $(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{(v_i, v_j) \mid (v_i, v_j) \in E,\ i < j\})$ є шуканою ациклічною орієнтацією, оскільки в кожному маршруті індекси вершин строго зростають. **7.43.** Використати орлему про рукостискання та теорему 63. **7.44.** Використати орлему про рукостискання та теорему 63. **7.47.** Твердження, двоїсте до задачі 7.46. **7.49.** Твердження, двоїсте до задачі 7.48. **7.51.** Використати теорему 64. **7.52.** За теоремою 64 в турнірі є шлях L, що проходить через усі його вершини. Нехай цей шлях веде з вершини v у w. Якщо в турнірі є дуга (w, v), то маршрут $L\cdot(w, v)$ є замкненим і містить всі вершини турніра. За задачею 7.18 він є сильно зв'язним. Інакше в турнірі є дуга (v, w), змінивши орієнтацію якої, ми одержимо попередній випадок. **7.53.** Після вилучення довільної вершини турніра отримуємо турнір. За теоремою 64 в турнірі є шлях L, що проходить через усі його вершини. Нехай цей шлях веде з вершини v в w. Якщо в отриманому орграфі немає дуги (w, v), то додамо її. Маршрут $L\cdot(w, v)$ є замкненим і містить всі вершини орграфа, тоді за задачею 7.18 він є сильно зв'язним. **7.57.** Див. задачу 7.56. **7.58.** Див. задачі 7.18 та 7.56. **7.59.** Див. задачу 7.58. **7.60.** За задачею 7.56 у сильному турнірі з n $(n \geq 4)$ вершинами існує контур Z довжини n-1. Нехай вершина v орграфа не увійшла до складу контура Z. Тоді існує інший контур Z' довжини n-1, який проходить через v. Нехай вершина v' орграфа не належить контуру Z'. Після вилучення вершини v залишається орграф, в якому контур Z проходить через усі його вершини. Так само, після вилучення вершини v' залишається орграф, в якому контур Z' проходить через усі його вершини. За задачею 7.18 ці орграфи сильні.

Розв'язання

7.7. Якщо $v = w$, то твердження задачі очевидне. Доведемо його для випадку, коли $v \neq w$.

($\Rightarrow$) З означення досяжності вершин випливає, що в орграфі існують шляхи $L_1 = (v, v_1, \ldots, v_n, w)$ і $L_2 = (w, w_1, \ldots, w_n, v)$. Тоді маршрут $L_1\cdot L_2$ є шуканим замкненим маршрутом, що містить вершини v і w.

($\Leftarrow$) Нехай $(v_1, \ldots, v_{n\text{-}1}, v_n, v_1)$ — замкнений маршрут, що містить вершини v і w. Без обмеження загальності можна вважати, що $v = v_i$ і $w = v_j$ для деяких натуральних чисел i, j таких, що $1 \leq i < j \leq n$. Маршрут $L_1 = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j\text{-}1}, v_j)$ веде з вершини v у w, а маршрут $L_2 = (v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_{i\text{-}1}, v_i)$ — з w у v. Згідно з задачею 7.2 з маршрутів L_1 і L_2 можна виділити шляхи, що ведуть з v в w і з w в v, відповідно. Таким чином, вершини v і w є взаємно досяжними.

7.13. Якщо в орграфі існують два різних джерела v і w, то існує нетривіальний замкнений маршрут, що веде з v у w, а потім з w у v. Згідно з задачею 7.4 орграф має контур. Суперечність.

7.15. З джерела досяжна кожна вершина орграфа, з недосяжної — тільки вона сама, тому джерело й недосяжна вершина збігаються.

7.17. Як тільки деякий нетривіальний замкнений маршрут проходить через вершину, вона має ненульовий півстепінь виходу та ненульовий півстепінь входу.

7.18. Для тривіальних орграфів твердження задачі очевидно. Доведемо його для нетривіальних орграфів.

($\Rightarrow$) Нехай дано нетривіальний сильний орграф $G = (V, E)$, де $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Граф сильно зв'язний, тому для довільних двох його різних вершин v_i і v_j, де $0 \le i, j \le n$, $i \ne j$, існує шлях $L_{i,j}$, що веде з v_i у v_j. Маршрут $L_{1,2}{\cdot}L_{2,3}{\cdot}\ldots{\cdot}L_{n-1,n}{\cdot}L_{n,1}$ за побудовою є кістяковим замкненим маршрутом.

($\Leftarrow$) Використати задачу 7.7.

7.19. Для тривіальних орграфів твердження задачі є очевидним. Доведемо його для нетривіальних орграфів.

($\Rightarrow$) Нехай дано нетривіальний сильний орграф $G = (V, E)$, де $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Граф сильно зв'язний, тому для довільних двох його різних вершин v_i і v_j, де $0 \le i, j \le n$, $i \ne j$, існує шлях $L_{i,j}$, що веде з v_i у v_j; далі, якщо орграф G містить дугу (v_i, v_j), покладемо $Z_{i,j} = (v_i, v_j)$, інакше $Z_{i,j} = L_{i,j}$. Маршрут $Z_1{\cdot}Z_{1,2}{\cdot}Z_2{\cdot}Z_{2,3}{\cdot}Z_3{\cdot}\ldots{\cdot}Z_{n-1,n}{\cdot}Z_n{\cdot}Z_{n,1}$, де $Z_i = Z_{i,1}{\cdot}Z_{1,i}{\cdot}Z_{i,2}{\cdot}Z_{2,i}{\cdot}\ldots{\cdot}Z_{i,i-1}{\cdot}Z_{i-1,i}{\cdot}Z_{i,i+1}{\cdot}Z_{i+1,i}{\cdot}\ldots\ {\cdot}Z_{i,n}{\cdot}Z_{n,i}$, $1 \le i \le n$, за побудовою є замкненим маршрутом, що містить кожне ребро орграфа.

($\Leftarrow$) Кожна вершина слабого орграфа інцидентна деякому його ребру, тому замкнений маршрут, який містить всі ребра орграфа, є кістяковим. Далі використати задачу 7.7.

7.20. Для тривіальних орграфів твердження задачі є очевидним. Доведемо його для нетривіальних орграфів.

($\Rightarrow$) Кожен сильно зв'язний граф є слабо зв'язним. Використовуючи метод задачі 7.19, побудуємо замкнений маршрут, що містить усі дуги даного орграфа. Далі за задачею 7.4 кожна дуга побудованого маршруту належить деякому контуру орграфа.

($\Leftarrow$) Нехай дуга (v, w) орграфа належить деякому циклу Z. Без обмеження загальності можна вважати, що вона є першою дугою цього циклу, тобто $Z = (v, w, w_1, \ldots, w_n, v)$. Тоді існує маршрут $(w, w_1, \ldots, w_n, v)$, що веде з вершини w у v. За задачею 7.2 з нього можна виділити шлях $L(w, v)$, що веде з w у v. Таким чином, кожні дві вершини, з'єднані дугою, є взаємно досяжними. Нехай тепер півмаршрут $Z' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ веде з вершини v_1 в v_n. Для всіх натуральних i, $1 \le i \le n\text{-}1$, маршрут Z_i визначимо так: якщо орграф містить дугу (v_i, v_{i+1}), то покладемо $Z_i = (v_i, v_{i+1})$, інакше покладемо $Z_i = L(v_i, v_{i+1})$. Маршрут $Z_1{\cdot}Z_2{\cdot}\ldots{\cdot}Z_n$ веде з вершини v_1 в

v_n. Таким чином, для кожного півмаршруту, що веде з v у w існує маршрут, що веде з v у w. Оскільки граф слабо зв'язний, то кожні дві його різні вершини зв'язані деяким півмаршрутом, причому в обох напрямках, оскільки для півмаршрутів орієнтація несуттєва. Звідси випливає, що кожні дві його різні вершини є взаємно досяжними (з самою собою кожна вершина є взаємно досяжною за означенням).

7.24. Нехай в слабо зв'язному орграфі $G = (V, E)$ є вершина $v \in V$, після вилучення якої отримуємо сильно зв'язний орграф. Тоді всі вершини з множини $V \setminus \{v\}$ взаємно досяжні. В силу слабкої зв'язності орграфа G в ньому існує принаймні одна дуга, інцидентна вершині v. Якщо $(v, w) \in E$, то всі вершини з множини $V \setminus \{v\}$ досяжні з вершини v. Інакше $(w, v) \in E$, і вершина v досяжна з кожної вершини множини $V \setminus \{v\}$. В обох можливих випадках орграф виявляється однобічно зв'язним. Суперечність.

7.26. Якщо v і w — дві різні недосяжні вершини орграфа, то жоден маршрут не веде з v у w і жоден маршрут не веде з w у v. Звідси випливає, що в однобічно зв'язному орграфі може існувати не більше однієї недосяжної вершини.

7.28. ($\Rightarrow$) Індукція за кількістю вершин. Для орграфів не більш ніж з двома вершинами твердження має місце. Нехай воно справджується для всіх орграфів не більш ніж з n ($n \geq 2$) вершинами. Розглянемо однобічно зв'язний орграф $G = (V, E)$ з $n+1$ вершиною.

Якщо він містить контур $(w_1, w_2, \ldots, w_k, w_1)$, то за задачею 7.7 всі вершини цього контура попарно взаємно досяжні. Розглянемо орграф $G' = (V', E')$, який отримується в результаті стягування множини вершин $W = \{w_1, w_2, .., w_k\}$ в нову вершину w, $w \notin V$, тобто $V' = \{w\} \cup (V \setminus W)$, $E' = (E \cup \{(w,v) | v \in V', \exists u \in W\ (u,v) \in E\} \cup \{(v,w) | v \in V', \exists u \in W\ \ (v,u) \in E\}) \cap (V' \times V')$. Отриманий орграф залишається однобічно зв'язним. Доведемо це. Якщо деякі дві вершини v, $u \notin W$ були звязані маршрутом $Z = (v, v_1, v_2, \ldots, v_n, u)$ і маршрут Z не містить вершин з множини W, то він веде з v в u і в орграфі G'. Інакше для деких натуральних чисел i і j, $1 \leq i \leq j \leq n$, v_i, $v_j \in W$ і серед вершин множини $\{v, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n, u\}$ жодна вершина не належить множині W. Тоді в графі G' маршрут $(v, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n, u)$ веде з v в u. Аналогічним чином встановлюється, що для кожної вершини з множини $V \setminus W$ існує хоча б один маршрут, що веде з неї в w або до неї з w. Контур має принаймні дві вершини, тому кількість вершин в графі G' не перевищує n. Оскільки з кожного нетривіального маршрута можна виділити шлях, то отриманий граф G′ є однобічно зв′язним. За припущенням індукції, у ньому існує маршрут, що проходить через усі його вершини. Без обмеження загальності можна вважати, що це маршрут $(v_1, v_2, \ldots, v_t, w, v_{t+1}, \ldots, v_m)$. Оскільки $(v_t, w) \in E'$ і $(w, v_{t+1}) \in E'$, за побудовою множини E' для деяких натуральних чисел i і j, $1 \leq i, j \leq n$, виконується $(v_t, w_i) \in E'$ і $(w_j, v_{t+1}) \in E$. Тоді в орграфі G існує маршрут $(v_1, v_2, \ldots, v_t, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_k, w_1, \ldots, w_j, v_{t+1}, \ldots, v_m)$, який проходить через усі вершини орграфа.

Якщо граф G не має жодного контура, то за задачами 7.9 та 7.27 він має тільки одну тупикову вершину. Нехай це вершина v. Оскільки граф G нетривіальний, то існує ребро (w, v), що входить у вершину v. Розглянемо орграф $G' = (V', E')$, де $V' = V\setminus\{v\}$, $E' = E\cap(V'\times V')$, який залишається однобічно зв'язним. Оскільки він є підграфом безконтурного графа G, то також не має контурів. Аналогічно попередньому він має тільки одну тупикову вершину. В орграфі G' півстепінь виходу кожної вершини, крім w, порівняно з графом G не змінився. Звідси випливає, що єдиною тупиковою вершиною графа G' може бути лише вершина w. Крім цього, граф G має n вершин, і за припущенням індукції в ньому існує маршрут, який проходить через всі його вершини. Оскільки тупикова вершина не може бути проміжною чи останньою вершиною жодного нетривіального маршруту, цей маршрут необхідно закінчується в недосяжній вершині w. Без обмеження загальності можна вважати, що маршрут $(v_1, v_2, \ldots, v_m, w)$ проходить через усі вершини орграфа G'. Тоді в орграфі G маршрут $(v_1, v_2, \ldots, v_m, v, w)$ проходить через усі вершини множини V. Згідно з принципом трансфінітної індукції твердження доведено.

($\Leftarrow$) Враховуючи результат задачі 7.2, якщо в орграфі є маршрут, що проходить через усі вершини, то з кожних двох вершин принаймні одна досяжна з іншої. Отже, орграф є одностороннє зв'язним.

7.35. В сильно зв'язному орграфі з кожної вершини досяжна кожна. Оскільки орграф має принаймні дві вершини, то з кожної вершини виходить принаймні одна дуга. Звідси маємо, що кожна вершина має півстепінь виходу не менш 1, тоді за теоремою 57 $|E|= \sum_{v\in V} \delta^+(v) \geq |V|=n$, що й треба було довести.

7.36. Доведемо це твердження індукцією за кількістю вершин. Для всіх орграфів з 1 чи 2 вершинами твердження має місце. Припустимо, що воно справджується для всіх орграфів з n ($n \geq 2$) вершинами. Розглянемо довільний орграф $G = (V, E)$ з n+1 вершиною та m дугами, $m \geq n^2+1$.

Якщо в ньому існує вершина v така, що $\delta(v) \leq n$, то орграф G-v має не менше m-$n \geq n^2+1$-$n = n(n-1)+1$ дуг, що для орграфа з n вершинами неможливо. Тоді для всіх вершин орграфа необхідно виконується $n+1 \leq \delta(v)$. Очевидно, що $\delta(v) \leq 2n$, оскільки всього є n вершин, відмінних від v. Якщо для всіх вершин орграфа виконується $\delta(v) = 2n$, то кожні дві вершини з'єднані парою симетричних дуг і граф є сильно зв'язним. Інакше в орграфі знайдеться вершина v така, що $n+1 \leq \delta(v) \leq 2n-1$. Розглянемо орграф G-v, який має n вершин і m-$\delta(v)$ дуг. Оскільки $m-\delta(v) \geq n^2+1-\delta(v) \geq n^2+1-(2n-1) = (n-1)^2+1$, за припущенням індукції орграф G-v є сильно зв'язним. Але $0 \leq \delta^+(v) \leq n$, $0 \leq \delta^-(v) \leq n$ і $\delta(v) \geq n+1$, тому $\delta^+(v) \geq 1$ і $\delta^-(v) \geq 1$. Тоді всі вершини орграфа G досяжні із вершини v, оскільки з вершини v досяжна хоча б одна вершина сильно зв'язного орграфа G-v. Аналогічно, вершина v

досяжна з кожної вершини графа G-v. Таким чином, граф G є сильно зв'язним. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено.

7.39. ($\Rightarrow$) Оскільки кореневе дерево є безконтурним орграфом, за задачею 7.12 воно має принаймні одну недосяжну вершину. Кожна вершина є досяжною з джерела, тому недосяжна вершина тільки одна, і є джерелом. Таким чином, тільки одна вершина має нульовий півстепінь входу, а півстепінь входу решти вершин не менше 1. Нехай v_0 — джерело. Припустимо, що для деякої вершини v орграфа виконується $\delta^-(v) \geq 2$. Тоді існують дві різні вершини w і u, такі, що орграф містить дуги (w, v) і (u, v). Нехай маршрут L_w веде з джерела v_0 до вершини w, а маршрут L_u — до u. У замкненому півмаршруті $L_w \cdot (w, v, u) \cdot (L_u)^{-1}$ вилучимо всі пари симетричних сусідніх дуг (разом із тими, що утворюються після попередніх вилучень). Оскільки вершини w і u були різними, маршрути L_w і L_u також різні. Тому наприкінці вказаної процедури одержимо нетривіальний замкнений півмаршрут з різними сусідніми ребрами. Використовуючи метод доведення теорем 10 і 11, з цього півмаршруту можна виділити півцикл і простий півцикл, тобто півконтур. Отримано суперечність. Звідси випливає, що всі вершини орграфа, крім джерела, мають півстепінь входу 1.

($\Leftarrow$) Доведемо це твердження індукцією за кількістю вершин. Для слабо зв'язних орграфів, що задовільняють умову і мають 1 чи 2 вершини, твердження є очевидним.

Нехай воно справджується для всіх таких орграфів, що мають не більше n ($n \geq 2$) вершин. Розглянемо довільний орграф $G = (V, E)$, який задовольняє умову й має n+1 вершину. Нехай вершина v_0 орграфа має нульовий півстепінь входу, а півстепінь входу решти вершин дорівнює 1. Розглянемо орграф $G' = G$-v_0. У графі G' всі вершини, суміжні із v_0, мають нульовий півстепінь входу; сам граф G' розпадається на слабо зв'язані компоненти. Зрозуміло, що кожна компонента містить принаймні одну вершину, суміжну із v_0, тобто недосяжну. Доведемо, що кожна така компонента містить тільки одну недосяжну вершину.

Орграф G за умовою слабо зв'язний, тому для кожної отриманої компоненти існує принаймні одна дуга, яка веде з вершини v_0 в деяку вершину v цієї компоненти. Оскільки в графі G всі вершини цієї компоненти мали півстепінь входу 1, у графі G' виконується $\delta^-(v) = 0$. Якщо деяка слабка компонента графа G' містить дві різні недосяжні вершини v і w, то існує півшлях L, який веде з v в w. Розглянемо півконтур $(v_0, v) \cdot L \cdot (w, v_0) = (v_0, v_1, \ldots, v_n, v_0)$. Вершина v_0 недосяжна, тому він не є контуром. Тоді для деякого натурального значення i, $1 \leq i \leq n$, $(v_0, v_1, \ldots, v_i)$ є маршрутом, і $(v_i, v_{i+1}) \notin E$. У цьому разі $(v_{i+1}, v_i) \in E$ і $(v_{i-1}, v_i) \in E$, а тоді $\delta^-(v_i) \geq 2$, що суперечить умові. Звідси випливає, що кожна слабо зв'язна компонента орграфа G' має не більше n вершин, рівно одна з яких недосяжна, а півстепінь входу решти її вершин такий самий, як і у орграфі G, тобто 1.

Нехай орграф G' є прямою сумою k слабо зв'язних компонент G_i, кожна з яких має єдину недосяжну вершину v_i. За припущенням індукції, кожна компонента G_i є кореневим деревом. За задачею 7.15 у кожній компоненті єдина недосяжна вершина є джерелом. Крім того, $(v_0, v_i)\in E$; тоді вершина v_0 є джерелом в орграфі G, оскільки з неї досяжне джерело кожного орграфа G_i.

Доведемо тепер, що орграф G не має півконтурів. Припустимо, що це не так, і в G існує півконтур. Усі орграфи G_i півконтурів не містять, тому півконтур необхідно містить вершину v_0 і має вигляд $(v_0, v_1, \ldots, v_m, v_0)$. Тоді в орграфі G' існує півшлях $v_1, \ldots, v_m$. Звідси випливає, що вершини v_1 і v_m належать одній і тій самій слабкій компонеті зв'зності орграфа G'. Але в G' вони обидві недосяжні. Суперечність. Таким чином, орграф G не має півконтурів. Згідно з принципом трансфінітної індукції твердження доведено.

7.42. Якщо граф є ейлеровим, то присвоїмо орієнтацію в порядку проходження ейлеровим циклом. В отриманій орієнтації для всіх вершин виконується $\delta^+(v) = \delta^-(v)$. Якщо граф має $2k$ ($k \geq 1$) вершин непарного степеня, то множину його ребер можна розбити на k ланцюгів (задача 2.27). Зорієнтуємо ребра графа в порядку проходу отриманими ланцюгами. За побудовою, кінцями цих ланцюгів є вершини непарного степеня, і кожна вершина непарного степеня є кінцем рівно одного ланцюга. Тому для всіх вершин непарного степеня в отриманій орієнтації виконується $|\delta^+(v)–\delta^-(v)| = 1$, а для всіх вершин парного степеня $\delta^+(v) = \delta^-(v)$. За лемою про рукостискання кількість вершин непарного степеня непарною бути не може.

7.45. З використанням орлеми про рукостискання і теореми 63 маємо

$$\sum_{v\in V} (\delta^-(v))^2 - \sum_{v\in V} (\delta^+(v))^2 = \sum_{v\in V} ((\delta^-(v))^2-(\delta^+(v))^2) =$$

$$= \sum_{v\in V} ((\delta^-(v))-(\delta^+(v)))((\delta^-(v))+(\delta^+(v))) = (n-1) \sum_{v\in V} ((\delta^-(v))-(\delta^+(v))) =$$

$$= (n-1)\Big(\sum_{v\in V} \delta^-(v) - \sum_{v\in V} \delta^+(v)\Big) = (n-1)\cdot 0 = 0.$$

7.46. Доведемо це твердження індукцєю за кількістю вершин турніра. Всі турніри з однією чи двома вершинами мають джерело. Припустимо, що кожен турнір з n ($n \geq 2$) вершинами має джерело. Розглянемо довільний $(n+1)$-вершинний турнір $G = (V, E)$. Нехай $v\in V$ — довільна вершина турніра. Орграф G-v має n вершин і є турніром. За припущенням індукції, у турнірі G-v є джерело; нехай це вершина w. Якщо $(v, w)\in E$, то із вершини v досяжна вершина w, а тоді й кожна вершина множини $V\setminus\{v, w\}$; у цьому разі v є джерелом в турнірі G. Якщо $(v, w)\notin E$, то $(w, v)\in E$, і вершина w є джерелом також у турнірі G. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено.

7.48. У турнірі кожні дві вершини з'єднані між собою дугою, тому двох вершин з нулевим півстепенем входу бути не може

7.50. Нехай v — вершина турніра $G = (V, E)$, яка має найбільший півстепінь виходу в G, а $w\in V$ — довільна інша вершина турніра. Якщо жодна вершина з множини вершин $\{v\}\cup\{x \mid (v, x)\in E\}$ не суміжна до w, то всі вони суміжні із w і вершина w має півстепінь виходу якнайменш на 1 більше, ніж вершина v, що суперечить вибору вершини v.

7.54. Доведемо це твердження індукцією за кількістю вершин. Для всіх таких турнірів, що мають не більше трьох вершин, твердження має місце. Припустимо, що воно справджується для всіх таких турнірів, що мають n ($n \geq 3$) вершин. Розглянемо довільний (n+1)-вершинний турнір $G = (V, E)$. Оскільки півстепень виходу може приймати довільне значення від 0 до n, і в нас є рівно n+1 вершина з попарно різними півстепенями виходу, то обов'язково знайдеться вершина $v \in V$ така, що $\delta^+(v) = n$. Орграф є турніром, тому $\delta^-(v) = 0$, і жоден контур (якщо він є) турніра G не проходить через вершину v. Розглянемо турнір G-v. Він також є турніром, а півстепені виходу вершин такі самі, як і в турнірі G, тому всі вони попарно різні. За припущенням індукції, турнір G-v є безконтурним, а тоді безконтурним є й G. Згідно принципу математичної індукції твердження доведено.

7.55. Доведемо твердження індукцією за кількістю вершин. Для всіх таких турнірів не більш ніж з трьома вершинами твердження виконується. Припустимо, що воно має місце для всіх таких турнірів з n ($n \geq 3$) вершинами. Розглянемо довільний (n+1)-вершинний турнір $G = (V, E)$, в якому принаймні дві вершини мають однакові півстепені виходу. За теоремою 64 у кожному турнірі існує шлях, що проходить через усі його вершини; нехай це маршрут $(v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n, v_{n+1})$. Припустимо, що контура довжини три в турнірі не існує. Оскільки кожні дві різні вершини з'єднані рівно однією дугою, то $(v_1, v_3) \in E$ (інакше є контур (v_1, v_2, v_3, v_1)), $(v_1, v_4) \in E$ (інакше є контур (v_1, v_3, v_4, v_1)), …, $(v_1, v_n) \in E$, $(v_1, v_{n+1}) \in E$, звідки $\delta^+(v_1) = n$. Оскільки вершина v_1 суміжна до кожної іншої вершини турніра G, решта вершин має півстепінь виходу не більше n-1 і жодна з них не суміжна до v_1. У турнірі G-v_1 кожна вершина має такий самий півстепінь виходу, як і в G, і існують принаймні дві вершини з однаковим півстепенем виходу. Тому за припущенням індукції в ньому існує контур довжини 3. Але цей контур належить і турніру G. Суперечність. Таким чином, турнір G має контур довжини три. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено.

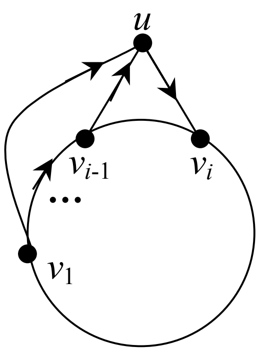
7.56. Нехай $G = (V, E)$ — сильно зв'язний турнір, що має n ($n \geq 3$) вершин. Спочатку доведемо, що в ньому є контур довжини 3, який проходить через дану вершину v_0. Нехай $S = \{x \mid (v_0, x) \in E\}$ — множина вершин, суміжних із v_0, $P = \{x \mid (x, v_0) \in E\}$ — із v_0. Якщо хоча б одна з цих множин порожня, то вершина v_0 не входить до складу жодного замкненого маршруту, а тоді турнір не є сильно зв'язним, що суперечить умові. Тому обидві ці множини непорожні й не містять вершини v_0. Оскільки G є турніром, ці множини не перетинаються й, крім того, $S \cup P \cup \{v_0\} = V$. Розглянемо розбиття множини вершин на $S \cup \{v_0\}$ і P; за задачею 7.21 знайдуться вершини $u \in S$ і $w \in P$ такі, що $(u, w) \in E$. В турнірі G маршрут (v_0, u, w, v_0) є шуканим контуром довжини три, що проходить через вершину v_0.

Подальше доведення проведемо індукцією за довжиною контурів k. Для $k = 3$ твердження вже доведено. Нехай турнір має контур $Z = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ довжини k ($3 \le k < n$), який проходить через вершину v_0. Покажемо, що в ньому є контур довжини k+1, який також проходить через вершину v_0. Виникають два випадки, які розглядаються нижче.

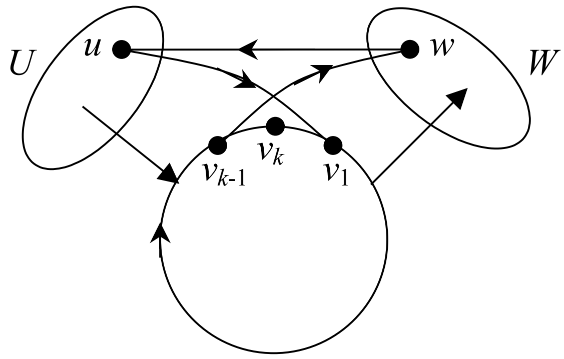
Випадок 1. Існує вершина $u \in V \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ і вершини $v, w \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ такі, що (v, u), $(u, w) \in E$. Без обмеження загальності можна вважати, що $v = v_1$. Нехай v_i — перша вершина при обході контура Z, починаючи з вершини v_1, для якої $(u, v_i) \in E$. Орграф є турніром, тому $i \ge 2$. Тоді $(v_{i-1}, u) \in E$, а тому $(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u, v_i, \ldots, v_k, v_1)$ — шуканий контур довжини k+1.

Випадок 2. Такої вершини u, як у випадку 1, немає. Тоді всі вершини, що не входять до контура Z, можна розбити на дві підмножина U і W, де U — множина вершин, суміжних до кожної вершини контура Z, а W — множина вершин, суміжних із кожною вершиною контура Z. Ці множини не перетинаються й жодна з них непорожня, оскільки за умовою орграф є сильним (дивись задачу 7.21). Так само завдяки сильній зв'язності орграфа існують такі вершини $u \in U$ і $w \in W$, що $(w, u) \in E$. Без обмеження загальності можна вважати, що $v_0 = v_1$, а тоді $(u, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, w, u)$ — шуканий контур довжини k+1.

В обох випадках знайдено контур довжини k+1, що проходить через вершину v_0. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено.



а)



б)

Рис. 39

Список літератури

1. Лекции по теории графов/ Емеличев В. А. и др. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. — 336 с.
2. Оре О. Теория графов. — 2-е издание. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 384 с.
3. Трохимчук Р.М. Збірник задач з теорії графів. Навчальний посібник для студентів факультету кібернетики. К.: РВЦ “Київський університет”, 1998. — 43 с.
4. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977. — 207 с.
5. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. — 300 с.
6. Хопкрофт Дж., Р. Мотвани, Дж. Ульман. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений, 2-е изд. — М.: Издательский дом “Вильямс”, 2002. — 528 с.

Зміст