Лекция 14: Орграфы

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Вступительные замечания

Если мы захотим изобразить схему дорожного движения в городе в виде графа (вершинами которого служат перекрестки, а ребрами — участки улиц между перекрестками), то нам следует явно учесть наличие участков с односторонним движением. Проще всего это сделать, указав стрелкой направление вдоль каждого ребра (а каждый участок улицы с двусторонним движением изображать парой ребер с противоположно направленными стрелками).

- Основное значение такой стрелки — «любой маршрут, содержащий данное ребро, должен идти по нему (в смысле порядка следования вершин) в направлении, указанном стрелкой».

Необходимость указывать направления на ребрах возникает во многих приложениях теории графов (некоторые из них будут упомянуты в дальнейшем). Это приводит нас к понятию ориентированного графа, которому и посвящены эта и две следующие лекции.

- Мы дадим только алгебраическое определение ориентированного графа, поскольку геометрических задач, т. е. задач на изображение именно ориентированных графов, мы не рассматриваем. (Вообще, придумать такую геометрическую задачу довольно сложно.)

Определяя ориентированный граф как пару $\langle V, E \rangle$, необходимо помнить, что каждое ребро задает *упорядоченную* пару вершин. На языке бинарных отношений (или мультиотношений) это означает отказ от свойства симметричности: количество пар (u, v) в E может не совпадать (хотя может и совпадать) в количеством пар (v, u).

Определение

Ориентированным графом, или *орграфом*, называется пара $\langle V, E \rangle$, где V — произвольное непустое множество, а E — произвольное бинарное мультиотношение на V. Элементы V называются *вершинами*, а элементы E — *ребрами* или *дугами* графа. Для дуги (u, v) вершина u называется началом, а вершина v — концом. Для вершины u дуга (u, v) — исходящая, а для вершины v — входящая.

Определение

Число дуг орграфа G, входящих в его вершину v, называется *степенью захода* вершины v и обозначается через $\rho^{+}(v)$, а число исходящих из v дуг — *степенью исхода* этой вершины (обозначается через $\rho^{-}(v)$). Петля учитывается и как входящая, и как исходящая дуга. Вершина без входящих дуг называется *источником*, а без исходящих дуг — *стоком* орграфа.

Любой обычный, «неориентированный» граф является, согласно определениям, частным случаем орграфа: каждое ребро рассматривается как пара разнонаправленных дуг между одними и теми же вершинами. Соответственно, многие результаты о графах имеют более общие аналоги для случая орграфов. Например, справедлив следующий аналог леммы о рукопожатиях.

Ориентированная лемма о рукопожатиях

В любом орграфе сумма степеней захода всех вершин равна сумме степеней исхода всех вершин.

Доказательство. При подсчете степеней каждая дуга (u, v) будет учтена дважды: для степеней захода — как дуга, входящая в v, а для степеней исхода — как дуга, исходящая из u. □

Многие понятия, относящиеся к орграфам, определяются аналогично соответствующим понятиям для неориентированных графов, с очевидными модификациями. Приведем основные из них.

Определение

Подграфом орграфа $G = \langle V, E \rangle$ называется орграф $G' = \langle V', E' \rangle$ такой, что $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.

Определение

Орграфы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называются *изоморфными*, если существует биекция f из множества V_1 на множество V_2 такая, что для любых двух вершин $u, v \in V_1$ число дуг орграфа G_1 с началом в u и концом в v равно числу дуг орграфа G_2 с началом в $f(u)$ и концом в $f(v)$. Биекция f называется при этом *изоморфизмом* G_1 на G_2.

Как и в случае графов, изоморфные орграфы имеют одно и то же число вершин, число дуг, одни и те же подграфы, одинаковое распределение пар (степень захода, степень исхода) для вершин и т. д.

На рис. 1 изображены орграфы G_1, G_2 и G_3. Орграфы G_1 и G_2 изоморфны (изоморфизм f задается правилом $f(u_i) = v_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 6$). А орграфы G_1 и G_3 не изоморфны (хотя если «стереть» стрелки на дугах этих орграфов, то полученные неориентированные графы будут изоморфными). В самом деле, очевидно, что если два орграфа изоморфны, то они содержат одинаковое число источников и одинаковое число стоков. Но в орграфе G_1 нет ни источников, ни стоков, а в орграфе G_3 есть два источника (вершины u_3 и u_4) и один сток (вершина u_6).

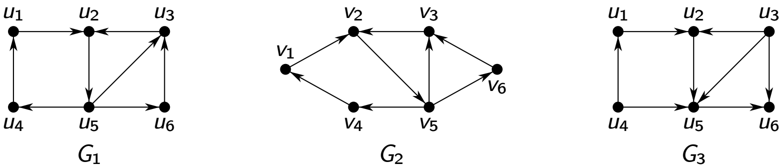
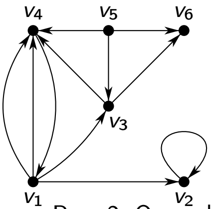


Рис. 1

Определение

Пусть G — орграф с вершинами $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Матрицей смежности* орграфа G называется квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n, в которой для каждых $i, j = 1, 2, \dots, n$ элемент a_{ij} равен числу дуг с началом в вершине v_i и концом в вершине v_j.

В отличие от матрицы смежности неориентированного графа, матрица смежности орграфа не обязана быть симметрической. На рис. 2 слева изображен орграф, а справа — его матрица смежности.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Орграф и его матрица смежности

Определения маршрута и частных случаев маршрута в орграфах практически не отличаются от определений для графов. Иногда используются термины «ормаршрут», «орцепь» и «орцикл», но реальной надобности в них нет.

Определение

Маршрутом в орграфе называется последовательность дуг этого орграфа $e_1, e_2, \ldots, e_k$ ($k \geqslant 1$), для которой существует последовательность вершин $v_0, v_1, \ldots, v_k$ такая, что для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ вершина v_{i-1} является началом, а вершина v_i — концом дуги e_i. При этом

- если $v_0 = v_k$, то маршрут называется *циклическим*;
- если $v_0 = u$, $v_k = v$, то маршрут называется (u, v)-*маршрутом*;
- для любой вершины u графа определен *тривиальный* маршрут, состоящий из одной этой вершины ($k = 0$, т. е. дуг нет, и $v_0 = u$);
- если все дуги $e_1, e_2, \ldots, e_k$ различны, то маршрут называется *цепью*, а циклический маршрут — *циклом*;
- если (u, v)-маршрут является цепью, то он называется (u, v)-*цепью*.

Как и в случае графов, маршруты (в особенности цепи и циклы) иногда удобно считать подграфами исходного орграфа.

Несимметричность множества пар E приводит к тому, что аналогов понятия связности для орграфов два и они «делят между собой» свойства связности для неориентированных графов.

Определение

Вершина v орграфа G *достижима из вершины* u, если в G существует (u, v)-маршрут. Вершины v и w *сильно связаны*, если каждая из них достижима из другой. Орграф G называется *сильно связным*, если любые две его вершины сильно связаны.

Среди орграфов, изображенных на рис. 1, G_1 и G_2 сильно связны, а G_3 нет.

Определение

Орграф G называется *слабо связным*, если для любых различных его вершин u и v найдется последовательность вершин $u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v$ такая, что для каждого $i = 1, \ldots, k-1$ в G найдется дуга с началом в одной из вершин v_{i-1}, v_i и концом в другой из них.

Условие слабой связности можно переформулировать так: орграф слабо связен, если он превращается в связный граф при «стирании» всех стрелок. Очевидно, что сильная связность влечет за собой слабую, а обратное неверно. Например, все три орграфа на рис. 1 слабо связны.

Критерий сильной связности

Орграф G сильно связен тогда и только тогда, когда в нем существует циклический маршрут, проходящий через все вершины орграфа G.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — сильно связный орграф, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — все его вершины. Тогда в G существуют

- (v_1, v_2)-маршрут и (v_2, v_1)-маршрут;
- (v_1, v_3)-маршрут и (v_3, v_1)-маршрут;
- ....
- (v_1, v_n)-маршрут и (v_n, v_1)-маршрут.

Соединив все эти маршруты в таком порядке, получим циклический маршрут, заведомо проходящий через все вершины G.

Достаточность. Пусть в орграфе G существует циклический маршрут

$$v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_k \to v_0,$$

проходящий через все вершины этого орграфа и пусть u, v — произвольные различные вершины в G. Тогда $u = v_i$ и $v = v_j$ для некоторых i, j и без ограничения общности можно считать, что $i < j$. Значит, в G есть (u, v)-маршрут $v_i \to v_{i+1} \to \cdots \to v_j$ и (v, u)-маршрут $v_j \to v_{j+1} \to \cdots \to v_k \to v_0 \to \cdots \to v_i$, что и требовалось.

Определение

Сильно связный подграф G' орграфа G называется *компонентой сильной связности* орграфа G, если он *максимален* в том смысле, что никакой другой сильно связный подграф G'' орграфа G не содержит подграфа G'.

Орграф, изображенный на рис. 3 слева, имеет три компоненты сильной связности, обведенные красными линиями. В орграфе есть дуги, не входящие ни в одну из компонент сильной связности — в этом главное отличие от компонент связности обычного графа. Отметим, что

- если C и C' — компоненты сильной связности орграфа G и в G есть дуга с началом в C и концом в C', то в G нет дуги с началом в C' и концом в C.

Стянув все дуги (см. лекцию 10) в каждой компоненте сильной связности орграфа G, мы получим орграф *без циклов*, называемый *конденсацией* G (для орграфа на рис. 3 справа приведена его конденсация).

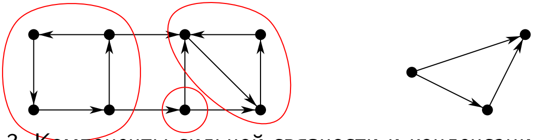


Рис. 3. Компоненты сильной связности и конденсация орграфа

На рис. 3 справа (на предыдущем слайде) приведен пример орграфа, не имеющего циклов (*ациклического* орграфа или *дага* — от английского directed acyclic graph). Такие орграфы возникнут в некоторых задачах двух последующих лекций. Важным частным случаем дага является корневое дерево (см. лекцию 6). Представление корневого дерева как орграфа очень удобно. Отметим несколько основных моментов:

- все дуги в корневом дереве ориентированы от отца к сыну;
- корень является единственным источником, степень захода всех остальных вершин равна 1;
- степень исхода вершины в принципе может быть любой, стоками в дереве являются все листья;
- из любой вершины достижимы в точности все ее потомки;
- при стирании всех стрелок получается «обычное» дерево, т. е. связный граф без циклов.

Класс дагов гораздо шире класса корневых деревьев. Например, даг на рис. 3 не является корневым деревом. В нем нарушены два условия: степень захода вершины справа не равна 1, а при стирании стрелок не получится дерево.

В заключение лекции, обсудим ориентированные аналоги понятий эйлерова и гамильтонова цикла (см. лекцию 4). В случае эйлерова цикла практически нет отличий не в определении, ни в характеризации.

Определение

Цикл, который проходит через каждую дугу орграфа, называется *эйлеровым*. Орграф называется *эйлеровым*, если в нем существует эйлеров цикл.

Теорема Эйлера о циклах (для орграфов)

Орграф без изолированных вершин является эйлеровым тогда и только тогда, когда он сильно связен и у любой его вершины совпадают степени исхода и захода. □

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству ее «неориентированного» аналога из лекции 4, поэтому мы его не приводим.

Определение

Цикл, который проходит через каждую вершину орграфа ровно один раз, называется *гамильтоновым*. Орграф называется *гамильтоновым*, если в нем существует гамильтонов цикл.

Очевидно, что всякий гамильтонов орграф сильно связен. Легко понять, что это необходимое условие гамильтоновости орграфа не является достаточным. Мы укажем (без доказательства) два достаточных условия гамильтоновости орграфов. Первое из них является ориентированным аналогом теоремы Дирака (см. лекцию 4).

Теорема Дирака (для орграфов)

Если сильно связный орграф G без кратных дуг и петель содержит n вершин, где $n > 2$, и для всякой его вершины v выполнено неравенство $\rho^{+}(v) + \rho^{-}(v) \geqslant n$, то орграф G является гамильтоновым. $\square$

Чтобы сформулировать второе достаточное условие гамильтоновости орграфа, нам понадобится одно новое понятие.

Определение

Орграф без петель, содержащий более одной вершины, в котором любые две различные вершины соединены ровно одной дугой, называется *турниром*.

Пример турнира изображен на рис. 4.

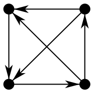


Рис. 4. Турнир

Ясно, что если G — турнир с n вершинами, то для всякой его вершины v выполнено равенство $\rho^+(v) + \rho^-(v) = n - 1$. Таким образом, достаточное условие гамильтоновости орграфа, даваемое теоремой Дирака, для турниров не выполнено. Тем не менее справедлива следующая

Теорема о гамильтоновости турниров

Всякий сильно связный турнир гамильтонов. □