Лекция 13: Раскраска плоских графов. Задачи, сводимые к задаче о раскраске

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Вступительные замечания

Общий итог всех проведенных в двух предыдущих лекциях рассмотрений следует признать неутешительным. Какой бы то ни было формулы, позволяющей вычислить хроматическое число произвольного графа по тем или иным его стандартным характеристикам (таким, как число вершин, ребер, компонент связности, распределение степеней вершин), не существует, а все имеющиеся оценки хроматического числа, как нижние, так и верхние, в общем случае могут быть сколь угодно далеки от его реального значения. Не существует и эффективного алгоритма построения оптимальной раскраски произвольного графа. Как мы увидим в данной лекции, ситуация разительно меняется в лучшую сторону, если ограничиться рассмотрением только планарных графов.

В лекции 1 была сформулирована задача о раскраске карты, которую теперь можно переформулировать так: найти оптимальную раскраску (а тем самым и хроматическое число) данного обыкновенного графа. Как отмечалось в лекции 1, эта задача восходит к задаче раскраски политической карты мира в минимально возможное число цветов (при которой граничащие друг с другом страны будут раскрашены в разные цвета). Соответствующий задаче граф можно нарисовать прямо на карте: внутри каждой страны отметить вершину, которая эту страну представляет («столицу»), а ребро между соседними странами провести через участок общей границы. Легко понять, что таким образом можно получить плоский граф. Таким образом, множество всех политических карт с точки зрения теории графов представляет собой множество всех планарных графов, а задача раскраски карты может быть переформулирована следующим образом.

Задача о раскраске карты

Найти хроматическое число данного планарного графа.

Легко придумать карту, для которой трех красок недостаточно. Пример такой карты приведен на рис. 1. Нетрудно понять, что этой карте соответствует граф K_4, хроматическое число которого равно 4.

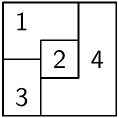


Рис. 1

Попытки придумать карту, для которой недостаточно и четырех красок, длительное время не приводили к успеху. Поэтому естественно возникла следующая гипотеза.

Гипотеза о четырех красках

Хроматическое число любого планарного графа не превосходит 4.

В нашем курсе мы докажем более слабое утверждение (см. следующий слайд).

Теорема Хивуда

Хроматическое число любого планарного графа не превосходит 5.

Для доказательства нам потребуется

Лемма о вершине степени $\leqslant 5$

В любом обыкновенном плоском графе найдется вершина, степень которой не превосходит 5.

Доказательство. Достаточно показать, что требуемая вершина найдется в одной из компонент связности заданного графа G. Значит, можно считать, что G связен. Положим $n = n(G)$ и $m = m(G)$. По следствию о числе ребер из теоремы Эйлера о плоских графах (лекция 10), $m \leqslant 3n - 6$. С учетом леммы о рукопожатиях (лекция 1) это означает, что

$$\sum_{v \in V(G)} \rho(v) = 2m \leqslant 6n - 12 < 6n.$$

Поскольку сумма n слагаемых меньше $6n$, хотя бы одно из слагаемых меньше 6 (т. е. не больше 5, так как степень вершины — натуральное число). Итак, существует вершина v графа G такая, что $\rho(v) \leqslant 5$. □

Доказательство. Пусть G — планарный граф. Можно считать, что граф G является обыкновенным (петли и кратные ребра не влияют на хроматическое число) и плоским (поскольку хроматическое число не меняется при изоморфизме). Положим $n = n(G)$ и будем вести доказательство индукцией по n. *База индукции* очевидна: если обыкновенный граф G содержит одну вершину, то $\chi(G) = 1 \leqslant 5$.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Выберем в графе G вершину v степени $\leqslant 5$ (такая вершина существует по только что доказанной лемме). Рассмотрим граф $G - v$. В нем $n - 1$ вершина, а значит, по предположению индукции существует правильная раскраска f графа $G - v$ не более чем 5 красками.

Если для раскраски вершин, смежных с v, использовано менее 5 красок, то раскраску f можно дополнить до правильной раскраски графа G не более чем 5 красками, раскрасив вершину v «незанятой» краской. Поэтому далее можно считать, что для раскраски вершин, смежных с v, использованы все 5 красок. В частности, с v смежны ровно 5 вершин; обозначим их v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 *в порядке следования по часовой стрелке относительно* v (см. рис. 2 на следующем слайде).

- Так как мы рассматриваем G как плоский граф, т. е. как фигуру на плоскости, мы имеем право пользоваться геометрическими соображениями.

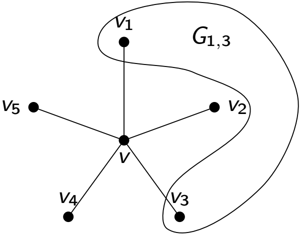


Рис. 2

Будем считать, что $f(v_1) = 1, \dots, f(v_5) = 5$. Обозначим через $G_{1,3}$ подграф графа G, порожденный всеми вершинами u такими, что $f(u) \in \{1, 3\}$. В частности, граф $G_{1,3}$ содержит вершины v_1 и v_3. Рассмотрим два случая.

Случай 1: вершины v_1 и v_3 лежат в разных компонентах связности графа $G_{1,3}$. Пусть K — компонента связности в $G_{1,3}$, содержащая вершину v_1. Переопределим f на K, перекрасив вершины цвета 1 в цвет 3 и наоборот. Новая функция f тоже будет правильной раскраской графа $G - v$. Действительно, «новые» вершины цвета 1 не смежны ни между собой (поскольку и ранее имели один цвет) ни со «старыми» вершинами цвета 1 (находятся в разных компонентах графа $G_{1,3}$). То же самое верно для вершин цвета 3, а для вершин остальных цветов ничего не изменилось.

Итак, мы построили правильную 5-раскраску графа $G - v$, при которой ни одна из вершин, смежных с v в графе G, не имеет цвета 1 (в результате перекраски вершина v_1 поменяла цвет на 3, а вершины v_2, v_3, v_4 и v_5 сохранили цвет). Значит, можно покрасить вершину v в цвет 1, получая правильную 5-раскраску графа G, что и требовалось.

Случай 2: вершины v_1 и v_3 лежат в одной и той же компоненте связности графа $G_{1,3}$. Значит, в графе G существует простая (v_1, v_3)-цепь, все вершины которой имеют цвета 1 и 3. Добавив к этой цепи ребра (v, v_1) и (v_3, v), получим простой цикл C (выделен на рис. 3 красным), ограничивающий часть плоскости, которая содержит ровно одну из вершин v_2 и v_4. Рассмотрим подграф $G_{2,4}$ графа G, порожденный всеми вершинами цветов 2 и 4. В частности, $G_{2,4}$ содержит вершины v_2 и v_4.

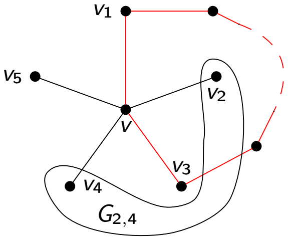


Рис. 3

Предположим, что вершины v_2 и v_4 лежат в одной компоненте связности графа $G_{2,4}$. Тогда их можно соединить простой цепью, проходящей только через вершины графа $G_{2,4}$. С геометрической точки зрения, эта цепь — линия, соединяющая точки v_2 и v_4, и она должна пересечь цикл C как замкнутую линию, поскольку одна из точек v_2, v_4 находиться внутри, а другая — вовне области, ограниченной циклом C. Поскольку граф G плоский, общая точка цепи и цикла может быть только вершиной графа. Но в цикле C нет ни одной вершины цвета 2 или 4, противоречие.

Следовательно, вершины v_2 и v_4 лежат в разных компонентах связности графа $G_{2,4}$. Аналогично случаю 1, перекрасим компоненту связности этого графа, содержащую вершину v_2, поменяв цвета 2 и 4 местами. Полученная при этом новая раскраска будет правильной 5-раскраской графа $G - v$, причем среди смежных с v вершин не будет вершины цвета 2. Раскрасив v в цвет 2, получим правильную 5-раскраску графа G. Теорема Хивуда доказана. □

Теорема о четырех красках

Теорема Хивуда была доказана в 1890 г. Понизить верхнюю границу для хроматического числа любого планарного графа с 5 до 4, т. е. подтвердить гипотезу о четырех красках, не удавалось еще почти 90 лет. В 1969 г. задача была сведена к рассмотрению конечного, но весьма большого числа частных случаев; позднее их число было сокращено до «всего лишь» 1482. Наконец, в 1976 г. К.Аппелль и В.Хейкен с помощью компьютерной программы разобрали все эти частные случаи (затратив на это около 2000 часов работы мощного по тем временам компьютера). В результате они доказали следующую теорему.

Теорема о четырех красках

Хроматическое число любого планарного графа не превосходит 4.

Доказательство теоремы о четырех красках стало первым случаем «компьютерного» решения сложной и давно стоявшей чисто математической проблемы. Воспроизвести доказательство К.Аппелля и В.Хейкена в рамках данного курса невозможно, поэтому мы приводим ее без доказательства.

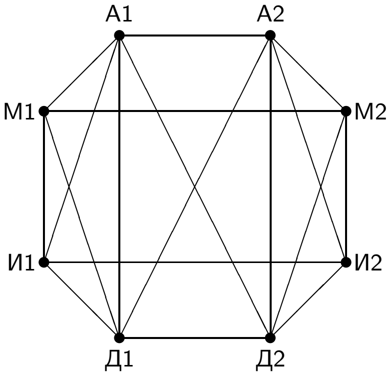
В оставшейся части данной лекции мы приведем примеры двух задач, для решения которых нужно найти хроматическое число и оптимальную раскраску графа. Первая из них — *задача составления расписания*. Нужно прочесть несколько лекций нескольким группам студентов. Некоторые из лекций не могут читаться одновременно — например, потому, что их читает один и тот же лектор, или их надо читать одной и той же группе студентов, или они должны проходить в одном и том же компьютерном классе. Требуется составить расписание так, чтобы чтение всех лекций заняло минимально возможное время (в качестве «единицы времени» в данной задаче естественно рассматривать одну пару).

Переведем эту задачу на язык графов. Построим граф G, в котором вершины соответствуют лекциям и две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие лекции не могут читаться одновременно. Очевидно, что любая правильная раскраска графа G определяет допустимое расписание (если при этой раскраске использовано k цветов, то для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ вершины, раскрашенные i-м цветом, дают список лекций, которые надо читать на i-й паре). И наоборот, любое допустимое расписание определяет правильную раскраску графа G. Таким образом, составление оптимального расписания сводится к нахождению оптимальной раскраски построенного нами графа.

Рассмотрим пример задачи на составление расписания. В студенческих группах КН-101 и КН-102 надо провести занятия по алгебре, дискретной математике, математическому анализу и истории России (по одному занятию по каждому предмету). Занятия по каждому предмету проводятся с каждой группой отдельно. Занятия по алгебре и по дискретной математике ведет преподаватель X, по математическому анализу — преподаватель Y, по истории России — преподаватель Z. Найти минимальное число пар, в которые можно «уложить» все занятия, и составить соответствующее расписание.

Решение. Построим граф с вершинами А1, А2, Д1, Д2, М1, М2, И1 и И2 (буква соответствует предмету, а цифра — номеру группы). Соединим ребрами вершины, соответствующие парам, которые нельзя проводить одновременно. Получим граф, изображенный на рис. 4 слева (см. следующий слайд). Вершины А1, А2, Д1 и Д2 этого графа порождают в нем подграф, изоморфный графу K_4. Следовательно, хроматическое число нашего графа не меньше 4. На рис. 4 справа указана правильная раскраска нашего графа в 4 краски. Следовательно, хроматическое число графа равно 4, т. е. все занятия можно провести за 4 пары. Соответствующее расписание указано в таблице на следующем слайде.

Задача составления расписания (пример, окончание)



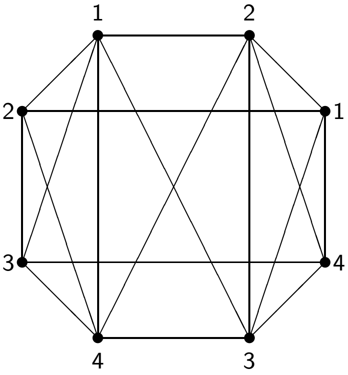


Рис. 4

	КН-101	КН-102
1 пара	Алгебра	Математический анализ
2 пара	Математический анализ	Алгебра
3 пара	История России	Дискретная математика
4 пара	Дискретная математика	История России

Вторая задача, которую мы рассмотрим, — *задача распределения оборудования*. Имеется некоторое количество работ и механизмов для их осуществления. Для выполнения каждой работы требуется одно и то же время. При этом никакой из механизмов не может быть занят одновременно более чем в одной работе. Нужно распределить механизмы так, чтобы общее время выполнения работ было минимально возможным. Для перевода этой задачи на язык теории графов рассмотрим граф G, вершинами которого являются работы, причем две различные вершины смежны тогда и только тогда, когда для выполнения соответствующих работ требуется хотя бы один общий механизм. При правильной раскраске этого графа вершины, раскрашенные одним и тем же цветом, соответствуют работам, которые можно проводить одновременно. Поэтому задача сводится к нахождению оптимальной раскраски графа G.

Рассмотрим пример. На предприятии планируется выполнить 8 работ $v_1, v_2, \ldots, v_8$. Для выполнения этих работ необходимы механизмы $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Использование механизмов для каждой из работ определяется следующей таблицей:

Механизм	Работа							
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
a_1	+		+				+	+
a_2		+		+				
a_3			+			+	+	
a_4	+	+		+	+			
a_5			+		+			+
a_6					+	+		+

Ни один из механизмов не может быть использован одновременно на двух работах. Выполнение каждой работы занимает 1 час. Как распределить механизмы, чтобы суммарное время выполнения всех работ было минимальным и каково это время?

Решение задачи дано на следующем слайде.

Решение. Рассмотрим граф G, вершинами которого являются планируемые работы $v_1, v_2, \ldots, v_8$, а ребра соединяют работы, в которых участвует хотя бы один общий механизм (и которые, по этой причине, нельзя проводить одновременно). Этот граф изображен на рис. 5 на следующем слайде. Вершины v_1, v_2, v_4, v_5 порождают подграф графа G, изоморфный K_4. Следовательно, $\chi(G) \geqslant 4$. Цифры в скобках на рис. 5 указывают правильную раскраску графа G в 4 краски. Следовательно, $\chi(G) = 4$. Таким образом, все работы можно выполнить за 4 часа. Для этого, в соответствии с найденной раскраской графа G, надо в 1-й час выполнять работы v_1 и v_6, во 2-й — работы v_2 и v_3, в 3-й — работы v_4 и v_8, в 4-й — работы v_5 и v_7.

Задача распределения оборудования (пример — рисунок)

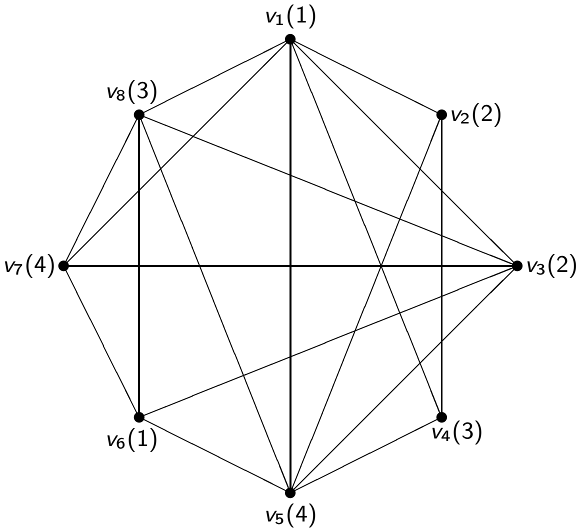


Рис. 5