

Лекция 10: Критерии планарности

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

На этой лекции мы продолжаем изучение свойств плоских и планарных графов. Наша первая цель — доказать сформулированную в конце предыдущей лекции теорему:

Теорема Эйлера о плоских графах

Если обыкновенный связный плоский граф имеет n вершин, m ребер и r граней, то $n - m + r = 2$.

Нам потребуется вспомогательная лемма.

Лемма о числе границ

Ребро e обыкновенного плоского графа G принадлежит границе ровно одной его грани, если оно является мостом в G , и границе ровно двух граней, если оно не является мостом.

Доказательство. Поскольку граф G — плоский, можно выделить область плоскости, не содержащую других точек графа, кроме точек ребра e , см. рис. 1:

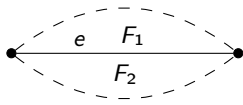


Рис. 1

Все точки верхней «половины» этой области очевидно принадлежат одной и той же грани, скажем, F_1 . Все точки нижней «половины» области также принадлежат одной и той же грани, обозначим ее за F_2 . Границе граней, отличных от F_1 и F_2 , ребро e не принадлежит. Таким образом, утверждение леммы равносильно тому, что $F_1 = F_2$ тогда и только тогда, когда e — мост. Согласно теореме о мостах (лекция 5), e — мост тогда и только тогда, когда e не лежит ни в одном цикле.

Пусть e лежит в цикле. По лемме о существовании простой цепи (лекция 3), e лежит в простом цикле. С геометрической точки зрения, простой цикл является замкнутой кривой, т. е. делит плоскость на «внутреннюю» и «внешнюю» области (любая линия, соединяющая точки из разных областей, пересекает кривую). Заметим, что одна из граней F_1 , F_2 лежит во внутренней, а другая — во внешней области, откуда $F_1 \neq F_2$.

Пусть e — мост. Тогда граф G — состоит из двух компонент связности, G' и G'' , причем либо одна из них находится внутри грани другой (как на рис. 2), либо обе находятся во внешней грани друг друга (разбирается аналогично). Ввиду отсутствия общих точек у G' и G'' , можно провести замкнутую кривую (пунктиром на рис. 2), внутри которой находится G' , а снаружи — G'' . При «возвращении» ребра e на место точки из областей F_1 и F_2 остаются соединенными фрагментом этой кривой, откуда $F_1 = F_2$. □

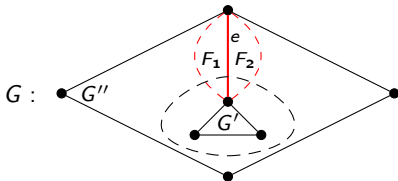


Рис. 2

Доказательство. Пусть обыкновенный связный плоский граф G имеет n вершин, m ребер и r граней. Если в G нет циклов, то во-первых, в нем нет граней, отличных от внешней, т. е. $r = 1$, а во-вторых, G — дерево, откуда $n = m + 1$ по теореме о деревьях (лекция 6). Итак, $n - m + r = 2$.

Предположим теперь, что G содержит циклы и ребро e принадлежит циклу. Положим $G_1 = G - e$, $n_1 = n(G_1)$, $m_1 = m(G_1)$ и $r_1 = g(G_1)$. Ясно, что граф G_1 — плоский, а в силу теоремы о разрыве цикла (лекция 3) он связан. По теореме о мостах (лекция 5), ребро e не является мостом. Тогда по лемме о числе границ e принадлежит границе ровно двух граней графа G . Значит, при удалении ребра e эти грани сольются в одну; остальные грани, очевидно, не изменятся. Имеем

$$n_1 - m_1 + r_1 = n - (m - 1) + (r - 1) = n - m + r.$$

Будем повторять процедуру удаления ребра, принадлежащего циклу, до тех пор, пока очередной граф G_i не будет деревом (каркасом графа G). Используя доказанное выше равенство для деревьев, получим

$$n - m + r = n_1 - m_1 + r_1 = \dots = n_i - m_i + r_i = 2,$$

что и требовалось. □

Следствия из теоремы Эйлера (1)

Доказанная теорема Эйлера имеет ряд полезных следствий. Первое следствие очевидно, но принципиально важно.

Следствие об изоморфизме

Два изоморфных плоских графа имеют одинаковое число граней.

Таким образом, у всех плоских изображений заданного планарного графа будет одно и то же число граней. Значит, хотя планарный граф $\langle V, E \rangle$ сам по себе не имеет никаких граней, у него есть алгебраическая характеристика «число граней». Таким образом, в формулировке теоремы Эйлера можно заменить плоский граф на планарный.

Многогранник как граф тоже не имеет граней; но как планарный граф, он имеет «число граней», и это число совпадает с числом его граней как многогранника (в этом несложно убедиться, проследив доказательство планарности многогранника). Тем самым, теорема Эйлера о многогранниках — это частный случай теоремы Эйлера о плоских графах.

Замечание

Очень многие невыпуклые многогранники также являются планарными графами, а значит, подчиняются тождеству Эйлера.

Следствие о несвязных графах

Если обыкновенный плоский граф G имеет n вершин, m ребер, r граней и c компонент связности, то $n - m + r = c + 1$.

Доказательство проведем индукцией по c . Базой индукции является теорема Эйлера о плоских графах. Докажем шаг индукции. Пусть c — натуральное число, и $c > 1$. Предположим, что утверждение теоремы верно для всех графов, имеющих $c - 1$ компоненту связности. Обозначим одну из компонент связности графа G через G_1 , а объединение всех остальных компонент связности этого графа — через G' . Положим $n(G_1) = n_1$, $m(G_1) = m_1$, $g(G_1) = r_1$, $n(G') = n'$, $m(G') = m'$ и $g(G') = r'$. В силу теоремы Эйлера о многогранниках и предположения индукции, $n_1 - m_1 + r_1 = 2$ и $n' - m' + r' = c - 1 + 1 = c$. Ясно, что $n = n_1 + n'$, $m = m_1 + m'$ и $r = r_1 + r' - 1$ (последнее равенство объясняется тем, что внешняя грань графа G является гранью каждого из графов G_1 и G'). Следовательно,

$$\begin{aligned}n - m + r &= (n_1 + n') - (m_1 + m') + (r_1 + r' - 1) = \\ &= (n_1 - m_1 + r_1) + (n' - m' + r') - 1 = 2 + c - 1 = c + 1.\end{aligned}$$

Шаг индукции доказан.

Следствие о числе ребер

Если обыкновенный связный планарный граф G содержит n вершин и m ребер и $n \geq 3$, то $m \leq 3n - 6$.

Доказательство. Поскольку число вершин и число ребер сохраняются при переходе к изоморфному графу, можно считать, что граф G — плоский. Кроме того, можно считать, что G не является цепью длины 2, для которой требуемое неравенство очевидно выполнено. Положим $r = g(G)$.

Длиной границы грани назовем число ребер в этой границе. Пусть $t(G)$ — сумма длин границ всех граней графа G . Поскольку граница грани не может состоять менее чем из трех ребер, $t(G) \geq 3r$. С другой стороны, по лемме о числе границ при подсчете $t(G)$ каждое ребро учтено не более чем дважды, т. е. $t(G) \leq 2m$. Следовательно, $3r \leq 2m$. Из тождества Эйлера имеем $r = m - n + 2$, откуда $3m - 3n + 6 \leq 2m$, а значит, $m \leq 3n - 6$. □

Это следствие дает возможность во многих случаях доказать непланарность графа, не прибегая ни к каким сложным процедурам.

Определение

Граф называется *полным*, если он является обыкновенным графом и любые две его различные вершины смежны. Полный граф с n вершинами обозначается через K_n .

Так, граф K_2 — это цепь длины 1, граф K_3 — это цикл длины 3 («треугольник»), а граф K_4 — это простейший из многогранников, а именно, тетраэдр. Все эти графы, очевидно, планарны.

Следствие о графе K_5

Граф K_5 не планарен.

Доказательство. Граф K_5 содержит 5 вершин и 10 ребер. Поскольку неравенство $10 \leq 3 \cdot 5 - 6$ неверно, этот граф не планарен по следствию о числе ребер. □

Следствие о графе $K_{3,3}$

Граф $K_{3,3}$ не планарен.

Доказательство. Предположим, что граф $K_{3,3}$ планарен. Поскольку в нем 6 вершин и 9 ребер, число граней равно 5 согласно тождеству Эйлера. Оценим величину $t(K_{3,3})$ — суммарную длину границ всех граней.

По критерию двудольности (лекция 7) граф $K_{3,3}$ не содержит треугольников, а значит, каждая грань его плоского изображения ограничена как минимум четырьмя ребрами, откуда $t(K_{3,3}) \geq 4g(K_{3,3}) = 20$. Но по лемме о числе границ имеем $t(K_{3,3}) \leq 2m(K_{3,3}) = 18$. Иными словами, $20 \leq 18$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

- Данное следствие есть в точности отрицательное решение задачи о домах и колодцах.
- Поскольку на прошлой лекции была приведена укладка графа $K_{3,3}$ на торе, тор не эквивалентен плоскости (или сфере) с точки зрения возможностей укладки графов.

Если граф является планарным, это можно доказать, предъявив соответствующее плоское изображение. Гораздо сложнее доказать, что граф планарным не является (головоломка о домах и колодцах служит тому хорошим примером). Теорема Эйлера и ее следствия позволяют в некоторых случаях доказывать непланарность графов. Кроме того, в некоторых случаях помогает следующее простое

Замечание о непланарных подграфах

Если у графа G есть непланарный подграф, то G не планарен. □

Однако непланарность многих графов только этими способами доказать нельзя. Нужен критерий, позволяющий доказать непланарность любого непланарного графа. Мы приведем (без доказательства) два варианта такого критерия. Оба они демонстрируют, что графы K_5 и $K_{3,3}$, непланарность которых мы только что доказали, являются в некотором смысле «универсальными» непланарными графами.

Введем две новые операции над графами.

Определение

Пусть u и v — смежные вершины графа G . Удалим из графа G ребро (u, v) , а затем добавим к полученному графу новую вершину w и два новых ребра: (u, w) и (v, w) (см. рис. 3). Полученный после этого граф обозначим через G' . Говорят, что граф G' получен *добавлением вершины степени 2 к графу G* .

Определение

Пусть w — вершина графа G , степень которой равна 2. Обозначим вершины, смежные с w в G , через u и v . Удалим из графа G вершину w , а затем добавим к полученному графу ребро (u, v) (см. рис. 4). Полученный граф обозначим через G' . Говорят, что граф G' получен *стиранием вершины степени 2 в графе G* .



Рис. 3. Добавление вершины степени 2 Рис. 4. Стирание вершины степени 2

Определение

Графы G_1 и G_2 называются *гомеоморфными*, если один из них может быть получен из другого применением конечного (возможно нулевого) числа операций добавления и/или стирания вершин степени 2.

Графы G_1 и G_2 , изображенные на рис. 5, гомеоморфны, поскольку граф G_2 может быть получен из G_1 стиранием вершин a , b , c и d и добавлением вершин e и f .

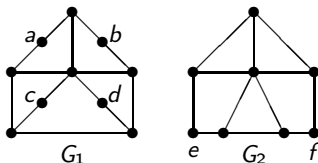


Рис. 5. Гомеоморфные графы

Теорема Понтрягина–Куратовского

Обыкновенный граф G планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного одному из графов K_5 и $K_{3,3}$.

Доказательство необходимости. С геометрической точки зрения, добавление вершины степени 2 — это добавление точки на ребре, а стирание такой вершины объединяет два ребра с общим концом в одно. Очевидно, что любая из этих операций, примененная к плоскому графу, снова даст плоский граф. Значит, по следствиям из теоремы Эйлера, никакой плоский (а следовательно, и планарный) граф не гомеоморфен графам K_5 и $K_{3,3}$. С учетом замечания о непланарных подграфах, необходимость доказана. □

Доказательство достаточности мы приводить не будем. Отметим, что для практического использования теоремы — доказательства непланарности графов — нужна именно та импликация, которую мы доказали.

Покажем, как с помощью теоремы Понтрягина–Куратовского можно доказать непланарность графа. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 6 слева (так называемый *граф Петерсена*). Удалив из этого графа ребра (z_1, z_4) и (z_2, z_3) , получаем граф G_1 , изображенный на рис. 6 посередине. Таким образом, G_1 — подграф графа Петерсена. Легко понять, что граф G_1 изоморфен графу G_2 , изображенному на рис. 6 справа. Очевидно, что граф G_2 получается из графа $K_{3,3}$ добавлением четырех вершин степени 2 (а именно, вершин z_1, z_2, z_3 и z_4). В силу теоремы Понтрягина–Куратовского граф Петерсена не планарен.

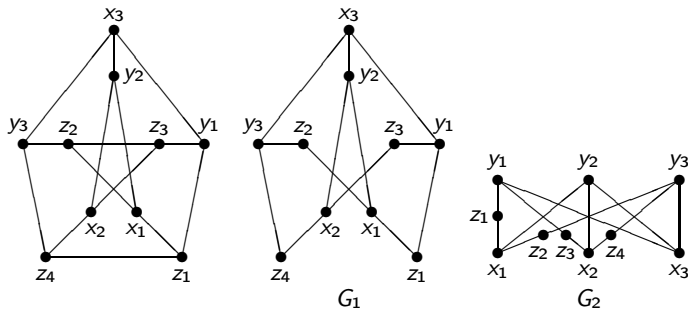


Рис. 6

Введем еще одну новую операцию над графами.

Определение

Пусть (u, v) — ребро графа G . Удалим из графа G вершины u и v . После этого добавим в граф G новую вершину w и соединим ее ребрами со всеми вершинами, с которыми была смежна хотя бы одна из вершин u и v (см. рис. 7). Обозначим полученный граф через G' . Говорят, что граф G' получен из G *стягиванием ребра* (u, v) . Если конечным (возможно нулевым) числом операций стягивания ребра из графа G можно получить граф H , то говорят, что G *стягивается* к H .



Рис. 7. Стягивание ребра

Теорема Вагнера

Обыкновенный граф G планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, который стягивается к графу K_5 или графу $K_{3,3}$.

Доказательство необходимости. Если стянуть ребро в плоском графе, он, очевидно, останется плоским. Значит, по следствиям из теоремы Эйлера, никакой плоский (а следовательно, и планарный) граф не стягивается ни к графу K_5 , ни к графу $K_{3,3}$. С учетом замечания о непланарных подграфах, необходимость доказана. \square

Мы снова не приводим доказательство достаточности и снова доказанной импликации достаточно для практического использования теоремы.

Покажем, как с помощью второго критерия планарности можно доказать непланарность графа. Рассмотрим вновь граф Петерсена и обозначим его вершины так, как это сделано на рис. 8 слева. Стыгиванием ребра (a_1, b_1) получим граф, изображенный на рис. 8 посередине. Затем последовательно стянем ребра (a_2, b_2) , (a_3, b_3) , (a_4, b_4) и, наконец, (a_5, b_5) . В результате получим граф, изображенный на рис. 8 справа, т. е. граф K_5 . Применяя теорему Вагнера, мы вновь убеждаемся в том, что граф Петерсена не планарен.

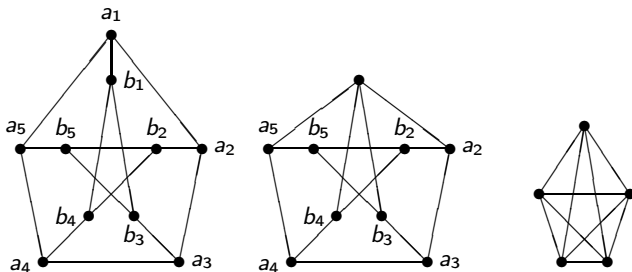


Рис. 8