Лекция 4: Эйлеров и гамильтонов цикл

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Цикл, содержащий все ребра графа, называется *эйлеровым*. Граф называется *эйлеровым*, если в нем существует эйлеров цикл.

Напомним, что цикл, по определению, не содержит повторяющихся ребер. Таким образом, эйлеров цикл — это маршрут, проходящий по всем ребрам графа ровно по одному разу и возвращающийся в исходную точку. Именно о таком маршруте спрашивается в задаче о кенигсбергских мостах. Следовательно, эйлеровы графы — это в точности те графы, для которых разрешима «обобщенная» задача о мостах. Характеризация этих графов дана в *теореме Эйлера о циклах*, которую мы сформулируем и докажем ниже.

Замечание

Для решения некоторых задач вместо эйлерова цикла удобно использовать родственное понятие *эйлеровой цепи*, отказываясь от условия «вернуться в исходную точку». К таким задачам, например, относятся задачи «нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги».

Задача китайского почтальона

Почтальон должен разнести почту по вверенному ему району, для чего он проходит по всем без исключения улицам района и возвращается в исходную точку (на почту). Требуется найти кратчайший маршрут почтальона.

Данная задача вполне современна: оптимальные маршруты нужно прокладывать для разнообразных машин, поливающих, посыпающих и размечающих улицы городов.

В представлении задачи китайского почтальона графом перекрестки соответствуют вершинам, а отрезки улиц между перекрестками — ребрам. В общем случае этой модели недостаточно, поскольку отрезки улиц имеют разную длину, а в задаче требуется минимизировать именно длину маршрута. Правильной моделью будет *взвешенный граф*, в котором ребрам приписаны положительные числа (см. лекцию 6). Сейчас мы ограничимся решением задачи китайского почтальона в частном случае, в котором в качестве модели достаточно использовать обычный граф:

Замечание

Если граф эйлеров, то эйлеров цикл является оптимальным маршрутом китайского почтальона.

Теорема Эйлера о циклах

Граф без изолированных вершин является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — эйлеров граф без изолированных вершин. Тогда каждая вершина инцидентна хотя бы одному ребру, а значит, эйлеров цикл проходит по всем вершинам. Следовательно, любые две вершины в G соединены маршрутом, являющимся частью эйлерова цикла, т. е. G связен.

Осталось доказать, что степени всех вершин графа G четны. Пусть v — произвольная вершина. «Обходя» граф по эйлерову циклу, мы «зайдем» в вершину v столько же раз, сколько «выйдем» из нее. При этом каждое инцидентное v ребро используется либо только для захода в v, либо только для выхода из v, за исключением петель, которые используются и для захода, и для выхода. Поскольку при подсчете степени вершины каждая петля учитывается дважды, а остальные ребра (учитываемые по одному разу) разбиваются на пары «входящее ребро»–«исходящее ребро», степень v должна быть четной.

Достаточность. Возьмем связный граф G, в котором степени всех вершин четны, и построим в нем эйлеров цикл. Если в G есть петли, то можно действовать так:

- удалить петли (связность графа и четность степеней вершин не нарушатся);
- построить эйлеров цикл в получившемся графе;
- встроить петли в построенный цикл, получая эйлеров цикл в исходном графе.

Поэтому в дальнейшем мы считаем, что в G *нет петель*.

Пусть v_0 — произвольная вершина графа G. Так как v_0 не изолированная, можно построить цепь с началом в v_0; построим ее, выбирая ребра $e_1, e_2, \ldots$ произвольно и остановившись в момент, когда цепь нельзя продолжить (т. е. все ребра, инцидентные вершине, в которую мы попали, уже включены в цепь). Поскольку число ребер в графе конечно, мы остановимся через конечное число шагов. Пусть нами построена цепь $e_1, \ldots, e_k$, проходящая по вершинам $v_0, \ldots, v_k$. Докажем, что $v_k = v_0$, т. е. мы построили цикл.

Теорема эйлера о циклах: доказательство достаточности (2)

Предположим, что $v_k \neq v_0$. Тогда, проходя всю цепь от v_0 к v_k, мы сколько-то раз, скажем, ℓ раз, входили в вершину v_k и $\ell - 1$ раз из нее выходили, причем все ребра, по которым мы входили и выходили, различны. Таким образом, в построенной цепи ровно $2\ell - 1$ ребер, инцидентных v. Поскольку степень вершины v четна, существует инцидентное v ребро, не входящее в цепь, что противоречит построению цепи. Следовательно, $v_k = v_0$.

Обозначим цикл, образованный ребрами $e_1, \ldots, e_k$, через C_1 (см. рис. 1). Если он эйлеров, построение закончено. Пусть C_1 не эйлеров, т. е. в графе $G_1 = G - \{e_1, \ldots, e_k\}$ есть ребра. Среди этих ребер есть инцидентное вершине цикла C_1, так как в противном случае C_1 — компонента связности графа G, не совпадающая со всем графом, что противоречит связности G. Пусть f_1 — ребро графа G_1, инцидентное вершине v_i (см. следующий слайд).

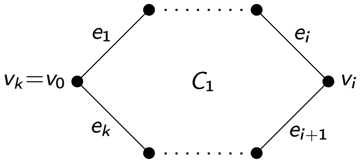


Рис. 1

Теорема эйлера о циклах: доказательство достаточности (3)

В графе G_1, так же как и в исходном графе G, степени всех вершин четны. Действительно, при удалении ребер $e_1, \ldots, e_k$ степень каждой из вершин $v_0, \ldots, v_k$ уменьшилась на четное число, а степени остальных вершин не изменились.

Рассмотрим компоненту связности графа G_1, содержащую ребро f_1. Внутри этой компоненты связности можно, начав с вершины v_i, построить цикл $\overline{C}_2$, состоящий из ребер $f_1, \ldots, f_m$ (см. рис. 2), тем же способом, которым был построен цикл C_1. Тогда последовательность ребер $e_1, \ldots, e_i, f_1, f_2, \ldots, f_m, e_{i+1}, \ldots, e_k$ также образует цикл (обозначим его C_2) и этот цикл содержит больше ребер, чем C_1. Если цикл C_2 эйлеров, построение закончено. В противном случае повторим описанное выше рассуждение, расширив цикл C_2 до цикла C_3, и т. д. Поскольку число ребер в G конечно, на каком-то шаге очередной построенный цикл окажется эйлеровым. $\square$

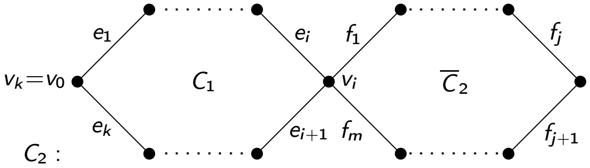


Рис. 2

Решение задачи о кенигсбергских мостах

Применим теорему Эйлера о циклах для решения задачи о кенигсбергских мостах. Напомним, что соответствующий граф выглядит так (см. рис. 8 в лекции 1):

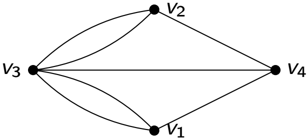


Рис. 3. «Граф кенигсбергских мостов»

Степени всех вершин этого графа нечетны. Из теоремы Эйлера о циклах вытекает, что обойти Кенигсберг, пройдя по каждому мосту ровно один раз, и вернуться в исходную точку невозможно.

Алгоритм Флёри

Приведенное нами доказательство достаточности в теореме Эйлера является *конструктивным*, т. е. содержит алгоритм построения эйлерова цикла. Для практического нахождения эйлерова цикла часто пользуются немного другим алгоритмом, формальное определение которого приведено ниже.

Алгоритм Флёри

Вход: эйлеров граф G.
Выход: список ребер графа G в той последовательности, в которой они образуют эйлеров цикл.

1. Положить текущий граф равным G, а текущую вершину — равной произвольной вершине $v \in V(G)$.
2. Выбрать произвольное, с учетом ограничения (см. ниже) ребро e текущего графа, инцидентное текущей вершине.
3. Назначить текущей вторую вершину, инцидентную e.
4. Удалить e из текущего графа и внести в список.
5. Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2.

Ограничение: если степень текущей вершины в текущем графе больше 1, нельзя выбирать ребро, удаление которого из текущего графа увеличит число компонент связности в нем.

Рассмотрим граф, изображенный на рис. 4 (он эйлеров в силу теоремы Эйлера о циклах) и найдем в нем эйлеров цикл.

Рис. 4

Пусть на шаге 1 выбрана вершина v_1. На выборе на шаге 2 ограничение никак не сказывается; пусть выбрано ребро (v_1, v_5). На двух следующих итерациях ограничений на выбор по-прежнему не возникает; пусть выбраны ребра (v_5, v_2) и (v_2, v_6). Тогда текущим графом становится граф, изображенный на рис. 4 справа (текущая вершина — v_6). На следующей итерации нельзя выбрать ребро (v_6, v_3) из-за ограничения; пусть выбрано ребро (v_6, v_5). Дальнейший выбор ребер определен однозначно (текущая вершина всегда будет иметь степень 1), так что в итоге будет построен следующий эйлеров цикл:

$$v_1 \to v_5 \to v_2 \to v_6 \to v_5 \to v_4 \to v_6 \to v_3 \to v_2 \to v_1.$$

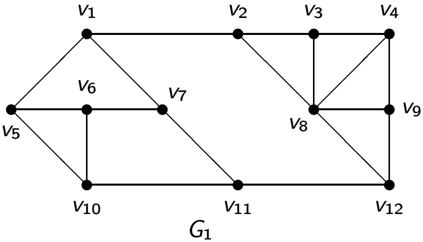
Определение

Цикл, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз, называется *гамильтоновым*. Граф называется *гамильтоновым*, если в нем существует гамильтонов цикл.

Граф G_1, изображенный на рис. 5, гамильтонов, так как в нем существует гамильтонов цикл:

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_8 \to v_4 \to v_9 \to v_{12} \to v_{11} \to v_7 \to v_6 \to v_{10} \to v_5 \to v_1.$$

А граф G_2, изображенный на том же рисунке, гамильтоновым не является. В этом можно убедиться, перебрав все возможные варианты.



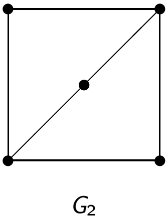


Рис. 5. Гамильтонов граф (слева) и не гамильтонов граф (справа)

Наиболее известной задачей о гамильтоновом цикле является

Задача коммивояжера

Дан список городов, соединенных дорогами, длины которых известны. Коммивояжер должен объехать все города, побывав в каждом по одному разу, и вернуться в свой город. Требуется найти кратчайший маршрут коммивояжера.

Пример практического приложения задачи коммивояжера: фирме требуется развести товары со склада по списку магазинов, используя одну машину, и вернуть эту машину на склад, причем машина должна пройти минимально возможное расстояние.

Представление задачи коммивояжера графом очевидно: города — это вершины, а дороги — ребра. Как и в случае задачи китайского почтальона, для полного представления задачи нужен взвешенный граф, в котором ребрам-дорогам приписаны их длины. Однако можно заметить, что любой (не обязательно оптимальный) маршрут коммивояжера представляет собой гамильтонов цикл. Следовательно, справедливо

Замечание

Задача коммивояжера разрешима тогда и только тогда, когда граф этой задачи гамильтонов.

Задачи поиска эйлерова и гамильтонова цикла: сравнение

Несмотря на внешнюю схожесть определений эйлерова и гамильтонова циклов, задачи нахождения циклов этих двух типов в данном графе разительно отличаются по сложности. Задача о нахождении эйлерова цикла — это *простая* с математической точки зрения задача:

- существует эффективный критерий существования эйлерова цикла (теорема Эйлера);
- если критерий выполнен, имеется эффективный алгоритм для нахождения цикла (алгоритм Флёри).

«Эффективный» в данном случае означает «требующий проведения небольшого числа операций относительно размера графа», а небольшим такое число считают, если оно для любого графа G не превосходит некоторой фиксированной степени числа $n(G)$ или $m(G)$. В случае эйлерова цикла можно, при подходящей организации данных, обойтись числом операций, не превосходящим некоторой константы, умноженной на $m(G)$.

- Ни критерия гамильтоновости графа, ни эффективного алгоритма нахождения гамильтонова цикла в произвольном гамильтоновом графе, не известно (и скорее всего, не существует). Задача о нахождении гамильтонова цикла — это *трудная* задача.

Очевидно, что

- гамильтонов граф всегда связен,
- наличие петель и кратных ребер на гамильтоновость не влияет.

Поэтому далее *в задачах на гамильтоновость мы считаем все графы обыкновенными и связными*. Следующая теорема дает простое для проверки (т. е. эффективное) достаточное условие гамильтоновости такого графа.

Теорема Оре

Пусть G — обыкновенный связный граф, содержащий n вершин, где $n > 2$. Если $\rho(v) + \rho(w) \geqslant n$ для любых двух различных несмежных вершин v и w графа G, то граф G гамильтонов.

Доказательство. Предположим, что существует граф G, удовлетворяющий всем условиям теоремы и не являющийся гамильтоновым.

Если возможно, добавим к G новое ребро так, чтобы граф остался негамильтоновым. Очевидно, новый граф тоже удовлетворяет всем условиям теоремы. Будем повторять данную процедуру, пока это возможно; в итоге, получим граф G' который удовлетворяет всем условиям теоремы и является *максимальным* негамильтоновым, т. е. превращается в гамильтонов при добавлении любого ребра. (Существование такого графа G' доказать легко: добавляя новые ребра, мы рано или поздно получим гамильтонов граф, поскольку граф, в котором любая пара вершин смежна, гамильтонов.)

Получим противоречие с исходным предположением, доказав, что граф G' гамильтонов.

Теорема Оре: доказательство (2)

Возьмем произвольные несмежные вершины u и v графа G'. По определению графа G', если к нему добавить ребро (u, v), появится гамильтонов цикл, содержащий это ребро, см. рис. 6. Значит, в G' есть (u, v)-цепь, содержащая все n вершин графа.

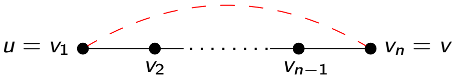


Рис. 6

Рассмотрим множество $S = \{i \mid u \text{ смежна с } v_{i+1}\}$ и множество $T = \{i \mid v \text{ смежна с } v_i\}$. В S имеется $\rho(u)$ элементов, а в T — $\rho(v)$ элементов, что в сумме дает $\rho(u) + \rho(v) \geqslant n$ элементов по условию теоремы. Все элементы множеств S и T являются числами 1 до $n - 1$, а значит, S и T имеют общий элемент (пусть это элемент i). Таким образом, в графе G' имеются ребра (u, v_{i+1}) и (v_i, v), что дает нам картину, изображенную на рис. 7 на следующем слайде.

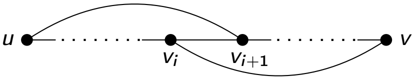


Рис. 7

Таким образом, в графе G' есть цикл

$$u \to v_2 \to \cdots \to v_i \to v \to v_{n-1} \to \cdots \to v_{i+1} \to u,$$

проходящий по всем вершинам по одному разу, т. е. гамильтонов цикл. Тем самым, мы показали, что граф G' гамильтонов и получили требуемое противоречие. $\square$

Из теоремы Оре вытекает следующее, несколько более слабое, но очень простое для проверки достаточное условие гамильтоновости.

Теорема Дирака

Пусть G — обыкновенный связный граф, содержащий n вершин, где $n > 2$. Если $\rho(v) \geqslant \frac{n}{2}$ для всякой вершины v графа G, то граф G гамильтонов. $\square$

Замечание

Достаточные условия гамильтоновости графа, даваемые теоремой Оре и теоремой Дирака, необходимыми не являются. Например, изображенный на рис. 8 гамильтонов граф этим условиям не удовлетворяет.

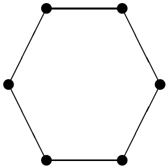


Рис. 8