Лекция 2: Элементарная алгебра графов

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Алгебраическое определение графа

В большинстве случаев, определение графа как геометрической фигуры является избыточным — достаточно задать только объекты и связи, а геометрическая форма их представления несущественна. Поэтому удобно использовать *алгебраическое определение* графа. Напомним, что

- *бинарным отношением* на множестве M называется произвольное подмножество декартова произведения $M \times M$, т. е. произвольное множество упорядоченных пар элементов из M;
- бинарное отношение называется *симметричным*, если для любых элементов $u, v \in M$ пары (u, v) и (v, u) обе лежат либо обе не лежат в этом отношении;
- *мультимножество* отличается от множества тем, что может содержать несколько «экземпляров» одного и того же элемента; аналогичное понятие для отношений называется *мультиотношением*.

Алгебраическое определение графа

Графом называется пара $\langle V, E \rangle$, где V — произвольное непустое множество, а E — произвольное симметричное бинарное мультиотношение на V. Элементы V называются *вершинами*, а элементы E — *ребрами* графа. Если в E есть k одинаковых элементов, они образуют *кратное ребро* кратности k.

Пусть $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Напомним, что матрицей бинарного отношения $R \subseteq V \times V$ называется квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n такая, что для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$ элемент a_{ij} равен 1, если $(v_i, v_j) \in R$, и 0 в противном случае. Для мультиотношения матрица определяется аналогично: элемент a_{ij} равен количеству вхождений пары (v_i, v_j) в R.

Замечание

Матрица смежности графа $\langle V, E\rangle$ — это в точности матрица мультиотношения E.

Замечание

Графы, симметричные бинарные мультиотношения и неотрицательные целочисленные симметрические матрицы — это три различных способа задания одной и той же математической структуры.

Бинарное отношение $R \subseteq V \times V$ называется *антирефлексивным*, если оно не содержит пар вида (v_i, v_i).

Замечание

Граф $\langle V, E\rangle$ является обыкновенным тогда и только тогда, когда E — антирефлексивное симметричное бинарное отношение.

Если графы определены как геометрические фигуры, то два графа могут считаться равными, только если их можно совместить наложением. Но такое определение равенства предъявляет к графам явно избыточные, не отражающие сути дела требования. Представим себе, что мы изображаем с помощью графа компьютерную сеть. Нам важно знать, соединены ли два компьютера напрямую, но совершенно не интересно, где именно проходит соединяющий их кабель (или это соединение вообще является беспроводным).

Аналогичным образом обстоит дело в большинстве других приложений теории графов. Поэтому следующее определение более удачно.

Определение

Два графа *равны* (алгебраически), если равны их матрицы смежности.

Так, с алгебраической точки зрения на рис. 1 приведены три различных изображения одного и того же графа, а не три различных графа.

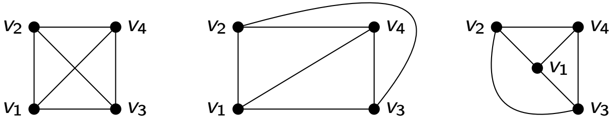


Рис. 1. Три изображения графа

Матрица смежности графа зависит от порядка, в котором перечисляются его вершины. Тогда, согласно приведенному выше определению, от этого порядка зависит, считать графы равными или нет. В большинстве случаев важнее уметь устанавливать равенство графов «с точностью до порядка перечисления вершин». Такое «равенство» называется *изоморфизмом*. Чтобы дать строгое определение, напомним некоторые понятия.

- *Отображением* f из множества A в множество B называется правило, согласно которому каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие некоторый однозначно определенный элемент множества B, который обозначается через $f(a)$;
- отображение f из множества A в множество B называется *биекцией*, если выполнены следующие два условия:
  - f *взаимно однозначно*, т. е. для любых двух элементов $a_1, a_2 \in A$ из того, что $a_1 \neq a_2$, вытекает, что $f(a_1) \neq f(a_2)$;
  - f *отображает* A *на* B, т. е. для любого элемента $b \in B$ существует элемент $a \in A$ такой, что $f(a) = b$.

Ясно, что

- если A и B — конечные множества, то биекция из A на B существует тогда и только тогда, когда множества A и B содержат одинаковое число элементов.

Определение

Графы $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ называются *изоморфными*, если существует биекция f из множества V_1 на множество V_2 такая, что для любых двух вершин $u, v \in V_1$ число ребер графа G_1, инцидентных вершинам u и v, равно числу ребер графа G_2, инцидентных вершинам $f(u)$ и $f(v)$. Такая биекция f (если она существует) называется *изоморфизмом* графа G_1 на граф G_2. Тот факт, что графы G_1 и G_2 изоморфны, обозначается через $G_1 \cong G_2$.

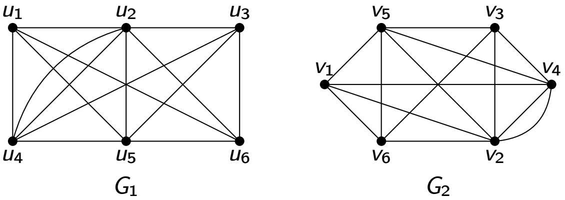
По свойству биекции, изоморфные графы G_1 и G_2 имеют одинаковое количество вершин. Если $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — все вершины графа G_1, а вершины G_2 взяты в порядке $f(v_1), \ldots, f(v_n)$, то матрицы смежности графов G_1 и G_2 совпадут. Тем самым, получаем

Утверждение

Два графа изоморфны тогда и только тогда, когда вершины одного из них можно перенумеровать так, чтобы матрица смежности этого графа совпала с матрицей смежности второго графа. □

Изоморфизм графов (3)

Пример изоморфных графов уже был приведен на рис. 1. Если графы устроены достаточно сложно, то по рисунку бывает нелегко определить, изоморфны они или нет. Непохожие на вид графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 2, изоморфны: если обозначить вершины этих графов так, как это сделано на рис. 2, то отображение из множества $V(G_1)$ на множество $V(G_2)$, сохраняющее номера вершин, является изоморфизмом. В самом деле, при такой нумерации вершин каждый из графов будет иметь матрицу смежности, приведенную на рис. 2 справа.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Два изоморфных графа и их матрица смежности

Вопрос о том, являются ли два данных графа изоморфными, в общем случае весьма сложен. Чтобы установить, что графы G_1 и G_2 изоморфны, нужно найти биекцию множества $V(G_1)$ на множество $V(G_2)$, являющуюся изоморфизмом, а чтобы доказать, что G_1 и G_2 *не* изоморфны, нужно проверить, что ни одна из таких биекций изоморфизмом не является. Полный перебор всех биекций чрезвычайно громоздок. Однако во многих случаях его можно сильно сократить или вообще избежать. Для этого мы установим ряд свойств, которыми должны обладать изоморфные графы (часть свойств появится на последующих слайдах). Если пара графов G_1, G_2 не удовлетворяет какому-нибудь из этих свойств, можно утверждать, что эти графы не изоморфны.

Пусть графы G_1 и G_2 изоморфны. Тогда:

- G_1 и G_2 содержат одинаковое число вершин (по свойству биекции, см. слайд 4);
- G_1 и G_2 содержат одинаковое число ребер (по определению изоморфизма);
- G_1 и G_2 имеют одинаковое распределение степеней вершин (из определения изоморфизма следует, что любая вершина графа G_1 имеет ту же степень, что и ее образ при изоморфизме — вершина графа G_2).

Введем еще одно важное понятие.

Определение

Подграфом графа $G = \langle V, E \rangle$ называется граф $G' = \langle V', E' \rangle$ такой, что $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.

Иными словами, подграф G' получается из графа G «удалением» некоторых вершин и ребер с соблюдением следующего естественного условия: если ребро графа G оставлено в G', то в G' оставлены и те вершины, которым это ребро инцидентно (по определению, G' — граф, а ребро графа не может «висеть в воздухе» — оно должно соединять какие-то вершины).

Укажем некоторые важные частные случаи понятия подграфа.

Определение

Подграф $G' = \langle V', E' \rangle$ графа $G = \langle V, E \rangle$ называется

- *суграфом* графа G, если $V' = V$;
- *вершинно-порожденным* подграфом графа G, если из того, что ребро $e \in E$ инцидентно вершинам $u, v \in V'$, вытекает, что $e \in E'$.

Иными словами, суграф графа G получается из G удалением некоторых ребер (с сохранением всех вершин), а вершинно-порожденный подграф — удалением некоторых вершин и всех инцидентных им ребер (с сохранением всех остальных ребер).

Определение

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — некоторый набор вершин графа G. Граф, вершинами которого являются $v_1, v_2, \ldots, v_k$, а ребрами — все ребра графа G, инцидентные этим вершинам, называется *подграфом графа G, порожденным вершинами* $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Ясно, что всякий вершинно-порожденный подграф G' графа G порожден некоторым набором вершин графа G, а именно набором вершин $V(G')$.

На рис. 3 изображены граф G и его подграфы G_1, G_2, G_3, G_4 и G_5. При этом

- подграфы G_1 и G_2 являются суграфами в G;
- G_3 и G_4 — вершинно-порожденные подграфы в G;
- подграф G_5 не является ни суграфом, ни вершинно-порожденным подграфом.

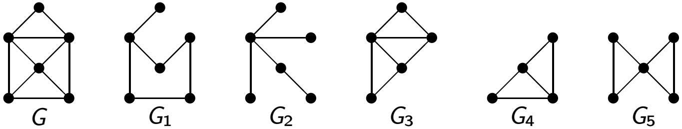


Рис. 3. Граф и пять его подграфов

Вернемся к вопросу о свойствах изоморфных друг другу графов. К списку на слайде 8 добавим еще одно очевидное, но важное свойство:

- если графы G_1 и G_2 изоморфны и H — подграф в G_1, то граф G_2 содержит подграф, изоморфный H.

Это свойство часто позволяет установить, что данные графы неизоморфны. В качестве примера рассмотрим графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 4.

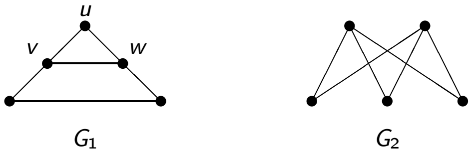


Рис. 4. Не изоморфные графы

В каждом из этих графов — шесть ребер и пять вершин, три из которых имеют степень 2, а две — степень 3, т. е. все свойства, указанные на слайде 7, выполнены. Но эти графы не изоморфны. В самом деле, в G_1 есть подграф, порожденный тремя вершинами (u, v и w), в котором любые две вершины смежны, а в G_2 такого подграфа нет.

Определение

Если e — произвольное ребро графа G, то *удаление ребра e* — это операция, результатом которой является граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \setminus \{e\}$. Этот граф обозначается через $G - e$.

Удалить вершину из графа чуть сложнее, поскольку вместе с ней нужно удалить и все инцидентные ей ребра (иначе полученный объект не будет графом, так как некоторые из ребер «провиснут», не соединяя вершин).

Определение

Если v — произвольная вершина графа G, то *удаление вершины v* — это операция, результатом которой является граф с множеством вершин $V(G) \setminus \{v\}$ и множеством ребер $E(G) \setminus \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, где $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — все ребра графа G, инцидентные вершине v. Этот граф обозначается через $G - v$.

Граф, полученный удалением из графа G ребер $e_1, e_2, \ldots, e_k$, будет обозначаться через $G - \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, а граф, полученный удалением из графа G вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$, через $G - \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Ясно, что эти графы не зависят от порядка удаления ребер и вершин.

Примеры удаления из графа ребер и вершин приведены на рис. 5.

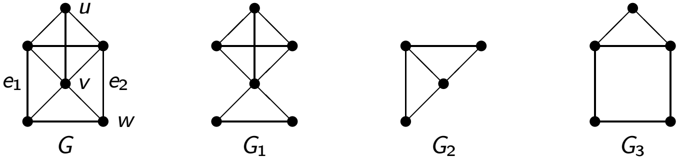


Рис. 5. Удаление ребер и вершин из графа

В обозначениях рис. 5 $G_1 = G - \{e_1, e_2\}$, $G_2 = G - \{u, w\}$, а $G_3 = G - v$.

Замечание

Любой подграф графа G может быть получен из G удалением некоторых его вершин и ребер. В самом деле, пусть $G = \langle V, E \rangle$, а $H = \langle V', E' \rangle$ — подграф графа G. Удалив из графа G все вершины, не принадлежащие множеству V', получим подграф в G, порожденный V'. Удалив из этого графа все его ребра, не входящие в множество E', получим граф H.

Определение

Пусть $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle, G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle, \ldots, G_k = \langle V_k, E_k \rangle$ — набор графов, никакие два из которых не имеют общих вершин. *Объединением графов* $G_1, G_2, \ldots, G_k$ называется граф $G = \langle V, E \rangle$ такой, что $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$ и $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$. Объединение графов $G_1, G_2, \ldots, G_k$ обозначается через $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$.

Для графов, изображенных на рис. 6, имеем $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$.

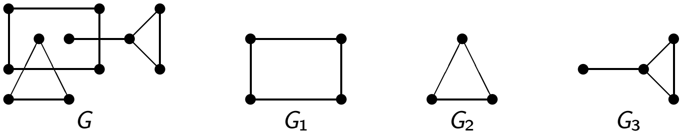


Рис. 6

Отметим очевидные свойства операции объединения графов:

1. $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$;
2. $(G_1 \cup G_2) \cup G_3 = G_1 \cup (G_2 \cup G_3)$;
3. если графы G_1 и G_2 не имеют общих вершин, а $v \in V(G_1)$, то $(V_1 - v) \cup V_2 = (V_1 \cup V_2) - v$;
4. если графы G_1 и G_2 не имеют общих вершин (а следовательно, и общих ребер), а $e \in E(G_1)$, то $(V_1 - e) \cup V_2 = (V_1 \cup V_2) - e$.

Последняя операция над графами, которую мы рассмотрим — дополнение графа. Она определена только для обыкновенных графов.

Определение

Дополнением обыкновенного графа G называется обыкновенный граф, у которого множество вершин совпадает с множеством вершин графа G, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G. Дополнение графа G обозначается через $\overline{G}$.

На рис. 7 изображены граф G и его дополнение $\overline{G}$.

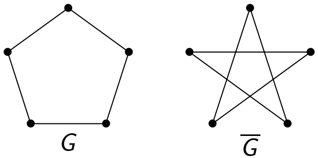


Рис. 7. Граф и его дополнение

Отметим два очевидных свойства дополнения графа:

1. если G — обыкновенный граф, то $\overline{\overline{G}} = G$;
2. если обыкновенные графы G_1 и G_2 изоморфны, то графы $\overline{G_1}$ и $\overline{G_2}$ также изоморфны.