Лекция 1: Знакомство с графами

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Графом называется геометрическая фигура, состоящая из точек и соединяющих их линий. Точки называются *вершинами*, а линии — *ребрами*. Граф с множеством вершин V и множеством ребер E обозначается через $\langle V, E\rangle$. Множество всех вершин графа G обозначается через $V(G)$, а множество всех его ребер — через $E(G)$.

Графы представляют *объекты* и *связи* между ними, например:

- города и дороги
- люди и знакомства
- атомы и межатомные связи

В этом курсе рассматривается как математический аппарат теории графов, так и его приложения к конкретным задачам из разных областей человеческой деятельности.

Мы рассматриваем только графы, содержащие *конечное* число вершин и *конечное* число ребер. Множество вершин графа всегда считается непустым, в то время как множество ребер может быть пустым (графы без ребер называются *пустыми*). Число вершин графа G обозначается через $n(G)$, а число его ребер — через $m(G)$.

Примеры графов

Несколько примеров графов приведено на рис. 1–5. Отметим, что на рис. 5 изображен один граф, состоящий из четырех не связанных между собой частей, а не четыре разных графа. Впрочем, при желании каждую из этих частей можно рассматривать как отдельный граф.

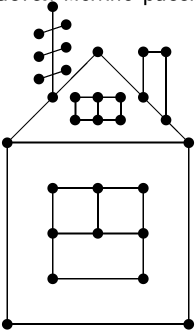


Рис. 1. Избушка без курьих ножек

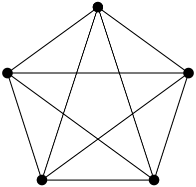


Рис. 2. «Знак качества»

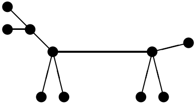


Рис. 4. Собачка

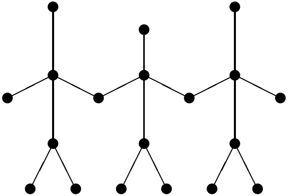


Рис. 3. Папа, мама и я

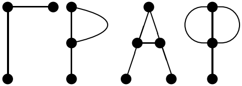


Рис. 5. Просто граф

Определение

Если ребро e соединяет вершины u и v, то говорят, что

- вершины u и v *инцидентны* ребру e
- ребро e *инцидентно* вершинам u и v
- вершины u и v *смежны* (при условии $u \neq v$).

Если k ребер ($k > 1$) инцидентны одной и той же паре вершин, то эти ребра образуют *кратное ребро кратности* k. Ребро, которое связывает вершину саму с собой, называется *петлей*. Вершина, не инцидентная никакому ребру, называется *изолированной*.

Пример: в графе на рис. 6, вершины u и v соединены ребром кратности 3, на вершине w имеется петля, а вершина z изолирована. Кратные ребра есть и в графе, изображенном на рис. 5.

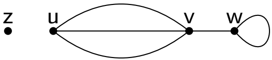


Рис. 6

Определение

Граф без кратных ребер и петель называется *обыкновенным*.

Определение

Число ребер, инцидентных вершине графа (при условии, что каждая петля считается дважды), называется *степенью* этой вершины. Степень вершины v обозначается через $\rho(v)$.

Лемма о рукопожатиях

В произвольном графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.

Доказательство. Если ребро e инцидентно различным вершинам графа u и v, то при подсчете суммы степеней вершин мы учтем это ребро дважды (один раз, когда будем подсчитывать степень вершины u, второй — при вычислении степени вершины v). Если же ребро e является петлей, то при подсчете суммы степеней вершин мы также учтем его дважды (по определению степени вершины). □

Из леммы о рукопожатиях легко вытекает следующий факт.

Следствие

В любом графе число вершин нечетной степени четно. □

На последующих слайдах мы рассмотрим несколько задач, сыгравших важную роль в развитии теории графов. В данной лекции мы приведем неформальные, «игровые» постановки этих задач, переведем их на язык теории графов и приведем примеры, иллюстрирующие их решение в некоторых простых случаях. В дальнейшем в нашем курсе будет продемонстрировано, что каждая из этих задач имеет не только «игровые», но и вполне реальные содержательные приложения, и приведены решения этих задач в общем случае.

Первая задача — это знаменитая средневековая

Головоломка о кенигсбергских мостах

Город Кенигсберг (ныне Калининград) расположен на берегах реки Прегель и двух островах на этой реке. Части города соединены мостами так, как показано на рис. 7 (зеленым цветом обозначена суша, синим — река, белым — мосты). Спрашивается, можно ли, выйдя из какой-нибудь точки города, пройти по каждому мосту ровно один раз и вернуться в исходную точку.

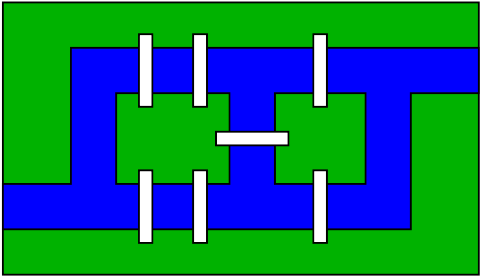


Рис. 7. План Кенигсберга (очень приблизительный)

Объектами в данной головоломке, очевидно, являются части города, а *связями* — мосты. Поэтому головоломке соответствует граф, приведенный на рис. 8 (вершины v_1 и v_2 — это берега, а вершины v_3 и v_4 — острова).

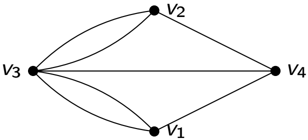


Рис. 8. «Граф кенигсбергских мостов»

Задача о кенигсбергских мостах эквивалентна вопросу о том, можно ли «обойти» данный граф, пройдя по каждому ребру ровно один раз и вернувшись в исходную точку, т. е. существует ли последовательность ребер графа со следующими свойствами:

- любые два соседних ребра имеют общую вершину;
- последнее ребро имеет общую вершину с первым;
- каждое ребро графа встречается в последовательности ровно один раз.

Путем полного перебора вариантов несложно убедиться, что граф, изображенный на рис. 8, обойти нельзя.

В 1736 году Леонард Эйлер, отталкиваясь от головоломки о мостах, сформулировал и решил более общую задачу.

Задача

Дан произвольный граф. Определить, можно ли его обойти в указанном выше смысле. (Сейчас такой «обход» называется *Эйлеровым циклом*).

Результат Эйлера, известный теперь как *теорема Эйлера о циклах*, был исторически первым серьезным математическим результатом, относящимся к теории графов. Мы сформулируем и докажем эту теорему в лекции 4.

Вторая задача, которую мы рассмотрим, тоже является головоломкой.

Головоломка о трех колодцах

В некоей деревне имеется три дома и три общих колодца. Жители деревни хотели бы, чтобы от каждого дома к каждому колодцу вела тропинка, и чтобы никакие две из этих тропинок не пересекались. Можно ли протоптать тропинки так, чтобы это условие выполнялось?

Переведем задачу на язык теории графов. Рассмотрим граф, в котором имеется 6 вершин, три из которых соответствуют домам, а три — колодцам. Каждую вершину из первой группы соединим ребром-тропинкой с каждой вершиной из второй группы (см. рис. 9).

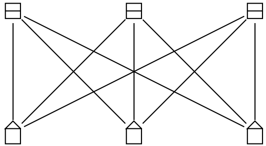


Рис. 9. Три дома и три колодца

Вопрос состоит в том, можно ли «перерисовать» этот граф на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не пересекались.

Проведя некоторое время в попытках решить головоломку, можно прийти к мысли, что она не имеет решения. Однако доказательство этого факта весьма сложно. Действительно, полный перебор тут бесполезен, поскольку способов нарисовать граф бесконечно много. В лекции 10 мы строго докажем, что нужного нам изображения данного графа не существует.

Головоломку о домах и колодцах можно рассматривать как исторически первую задачу об изображении, или «укладке» графа так, чтобы выполнялись определенные свойства. Такие задачи возникают, например, при проектировании транспортных развязок (транспортные потоки разных направлений не должны пересекаться) и печатных плат (не должны пересекаться проводящие дорожки).

Третья задача, в отличие от двух предыдущих, является не индивидуальной, а «массовой», т. е. в ее условии присутствуют параметры, которые можно менять. Это

Задача о деревенских свадьбах

В деревне живут несколько юношей и несколько девушек. Некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Требуется «поженить» максимально возможное число пар при условии, что «женить» можно только знакомые пары.

Переведем задачу на язык теории графов. *Объектами*, т. е. вершинами графа, в данной задаче являются юноши и девушки, а каждая *связь*, т. е. ребро, описывает знакомую пару юноша-девушка. Требуется найти в графе максимальное по размеру множество ребер такое, что никакие два из них не имеют общих вершин. К такой же математической модели сводятся и другие задачи (задача о назначениях, задача о представителях и т. д.). Подробное обсуждение и алгоритм решения таких задач будет приведен в лекции 7. В данной лекции мы ограничимся тем, что рассмотрим два примера.

В первом примере имеется 5 юношей x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и 5 девушек y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, а «граф знакомств» имеет вид, изображенный на рис. 10.

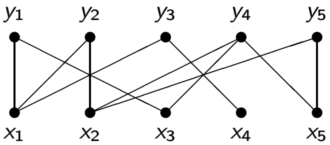


Рис. 10

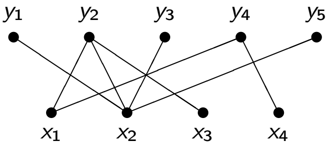


Рис. 11

Нетрудно заметить, что в этом случае можно составить пары, в которые войдут все юноши и девушки. Например, можно взять набор пар (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_4), (x_4, y_3), (x_5, y_5).

Во втором примере у нас будут 4 юноши x_1, x_2, x_3, x_4 и 5 девушек y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, а «граф знакомств» будет иметь вид, изображенный на рис. 11. В этом случае невозможно составить даже четыре пары. Это легко пояснить: трое юношей (x_1, x_3 и x_4) знакомы «в совокупности» только с двумя девушками (y_2 и y_4). Таким образом, максимальное число пар — это три, например, (x_2, y_5), (x_3, y_2), (x_4, y_4).

Четвертая и последняя из рассматриваемых на этой лекции задач тоже является массовой. Это

Задача о раскраске карты

Дана политическая карта мира. Требуется раскрасить каждую страну в какой-либо цвет так, чтобы любые две граничащие между собой страны были раскрашены в разные цвета, использовав при этом минимально возможное число красок. (Две страны считаются граничащими, если их границы имеют общую линию, а не точку.)

В данной задаче *объекты* — это страны, а *связи* — это границы, т. е. две вершины в графе смежны тогда и только тогда, когда данные страны граничат. Соответственно, на языке теории графов получается следующая

Задача о раскраске графа

Дан обыкновенный граф. Требуется раскрасить вершины графа в минимальное число цветов так, чтобы любые две смежные вершины имели различный цвет.

Приведем пример. На рис. 12 слева схематично изображена карта, а справа приведен соответствующий ей граф. Цифры означают номера стран.

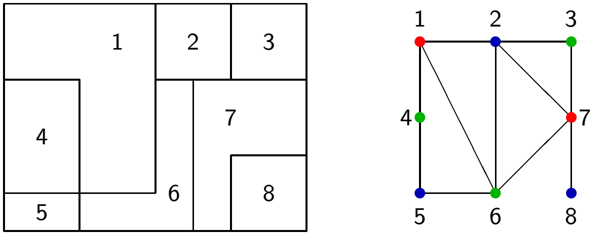


Рис. 12. Карта и соответствующий ей граф

Поскольку на карте присутствуют три попарно граничащие страны (например, первая, вторая и шестая), ясно, что менее, чем тремя красками, обойтись не удастся (для каждой из этих трех стран нужен свой цвет). С другой стороны, на рис. 12 справа указана раскраска вершин нашего графа в три цвета. Таким образом, число красок, минимально необходимое для раскраски данной карты, равно трем.

Раскраскам графов посвящены лекции 11–13. В частности, в лекции 13 мы ответим на вопрос о том, каково минимальное число красок, необходимых для раскраски любой карты.

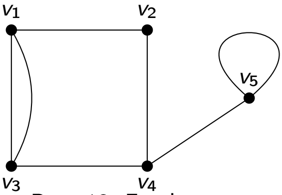
Матрица смежности

Многие задачи, связанные с графами, решаются с помощью компьютера. Поэтому нужно уметь задавать графы формально, не прибегая к рисункам. Существует целый ряд способов формального задания графов. Мы рассмотрим два из них — *матрицу смежности* и *списки смежности*.

Определение

Пусть G — граф, а $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — множество всех его вершин. *Матрицей смежности* графа G называется квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n, в которой для каждых $i, j = 1, 2, \ldots, n$ элемент a_{ij} равен числу ребер, инцидентных вершинам v_i и v_j, при этом каждая петля считается дважды.

Матрица смежности представляет граф, сохраняя информацию обо всех объектах и о количестве связей между каждой парой объектов. На рис. 13 слева изображен граф, а справа указана его матрица смежности.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 13. Граф и его матрица смежности

Матрица смежности любого графа является симметрической. (Напомним, что квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *симметрической*, если $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$.) Если граф не содержит кратных ребер, то все элементы его матрицы смежности равны либо 0, либо 1. В частности, это верно для матрицы смежности обыкновенного графа, в которой, кроме того, все элементы на главной диагонали равны 0.

Главное удобство матрицы смежности — в том, что ответ на вопрос, существует ли ребро, инцидентное двум данным вершинам, можно получить за один шаг (заглянув в одну ячейку матрицы). Дополнительное преимущество состоит в том, что некоторые свойства графов имеют алгебраическую природу, и на соответствующие вопросы можно отвечать, используя алгебру матриц — матричное умножение, собственные числа, и т. п.

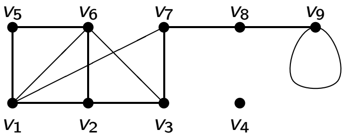
Основной недостаток матрицы смежности — большой объем требуемой памяти (матрица смежности n-вершинного графа имеет n^2 элементов). Если ребер в графе мало, то почти вся матрица заполнена нулями, что неэффективно. В этом случае предпочтителен другой способ — списки смежности.

Мы опишем списки смежности только для графов без кратных ребер.

Определение

Пусть G — граф, а $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — множество всех его вершин. *Списками смежности* графа G называется массив из n списков, в котором, для любого $i = 1, \ldots, n$, i-й список содержит в точности все вершины, смежные с v_i.

На рис. 14 приведен граф и его списки смежности.



1	v_2, v_5, v_6, v_7
2	v_1, v_3, v_6
3	v_2, v_6, v_7
4	
5	v_1, v_6
6	v_1, v_2, v_3, v_5
7	v_1, v_3, v_8
8	v_7, v_9
9	v_8, v_9

Рис. 14. Граф и его списки смежности

Списки смежности очень экономичны по памяти, но зато для выяснения вопроса, смежны ли две данных вершины, может потребоваться полностью просмотреть список одной из них.