ГЛАВА 4

АРИФМЕТИКА

В математической практике
нет ничего более хлопотного (правы любезные студенты-математики),
что более всего досаждало бы и мешало вычислителям, чем перемножение,
деление или извлечение квадратных и кубических корней больших чисел.
Выполнение этих операций не только приводит к значительным потерям времени,
но и сопряжено с такой массой скрытых ошибок, что я начал размышлять
о поисках надежного и удобного средства устранения подобных помех.

— ДЖОН НЕПЕР (J. NAPIER [NEPAIR]) (1616)

Терпеть не могу складывать!
Самая большая ошибка — считать арифметику точной *наукой.*
Существуют... тайные законы Чисел, которые может постигнуть
только ум, подобный моему. К примеру, при сложении чисел в столбик
сначала снизу вверх, а затем наоборот вы всегда получите разные суммы.

— М. П. ЛА ТУШ (M. P. LA TOUCHE) (1878)

Не могу представить, чтобы кому-нибудь понадобилось
выполнять умножение со скоростью 40 000 или даже 4 000 операций в час;
такое радикальное средство, как переход к восьмеричной системе счисления,
не следует навязывать всему человечеству ради нескольких личностей.

— Ф. Х. УЭЙЛС (F. X. WALES) (1936)

Большинство специалистов в теории чисел не проявляют интереса к арифметике.

— Б. ПАРЛЕТТ (B. PARLETT) (1979)

ОСНОВНОЕ НАЗНАЧЕНИЕ этой главы — тщательный анализ четырех основных действий арифметики: сложения, вычитания, умножения и деления. Арифметику многие считают тривиальной дисциплиной, которой обучают детей, а арифметические действия — уделом компьютеров; но мы увидим далее, что арифметика — это увлекательный предмет с множеством интересных аспектов. Она лежит в основе многих важных компьютерных приложений, поэтому необходимо самым тщательным образом изучить эффективные методы вычислительных операций над числами.

На самом деле, арифметика — это живая и все еще успешно развивающаяся отрасль науки, сыгравшая важную роль в мировой истории. В этой главе будут проанализированы алгоритмы выполнения операций над различными типами величин: числами с "плавающей точкой", очень большими числами, дробями (рациональными числами), полиномами и степенными рядами. Кроме того, здесь будут рассмотрены связанные с ними вопросы, такие как преобразование из одной системы счисления в другую, разложение чисел на множители и операции над полиномами.

4.1. ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Способ выполнения арифметических операций тесно связан со способом представления чисел, над которыми выполняются операции. Поэтому резонно начать изучение предмета с обсуждения принципиальных подходов к представлению чисел.

Позиционное представление *с основанием* b (или *по основанию* b) определяется правилом

$$\begin{aligned}(\ldots a_3a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\ldots)_b \\ = \cdots + a_3b^3 + a_2b^2 + a_1b^1 + a_0 + a_{-1}b^{-1} + a_{-2}b^{-2} + \cdots;\end{aligned} \qquad (1)$$

например, $(520.3)_6 = 5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 0 + 3 \cdot 6^{-1} = 192\frac{1}{2}$. Традиционная десятичная система — это, разумеется, частный случай, когда b равно десяти, а значения a_k выбираются из "десятичных цифр" 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; в этом случае индекс b в (1) может быть опущен.

Простейшие обобщения десятичной системы получаются, когда в качестве b берется целое число, большее 1, а в качестве a_k — целые числа из интервала $0 \le a_k < b$. Таким образом приходим к стандартной двоичной ($b = 2$), троичной ($b = 3$), четверичной ($b = 4$), пятеричной ($b = 5$), ... системам счисления. В общем случае в качестве b можно взять любое ненулевое число, а числа a_k выбирать из произвольного заранее заданного ряда чисел. Как мы увидим далее, это приводит к некоторым интересным ситуациям. Точка между a_0 и a_{-1} в (1) называется *позиционной* или *разделяющей*. (Если $b = 10$, точка также называется десятичной; в случае, когда $b = 2$, она иногда называется двоичной точкой и т. д.). В странах Европейского *континента* (Великобритания, как известно, себя к таковым не относит) вместо разделяющей точки часто используется запятая.

Числа a_k в (1) называются *цифрами* представления. Цифру a_k с бóльшим k называют более значимой, чем a_k с меньшим k; крайнюю слева, или "ведущую", цифру называют *наиболее значимой*, а крайнюю справа, или "хвостовую", — *наименее значимой*. В стандартной двоичной системе двоичные цифры зачастую называют *битами*; в стандартной шестнадцатеричной системе (с основанием шестнадцать) шестнадцатеричные цифры от нуля до пятнадцати обычно обозначаются так:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

История развития способов представления чисел — увлекательная повесть, так как их развитие происходит параллельно развитию самой цивилизации. Однако при подробном рассмотрении этой истории мы ушли бы далеко в сторону от главной темы; тем не менее полезно конспективно изложить основные ее моменты.

Наиболее ранние формы представления чисел, обнаруженные в древних цивилизациях, обычно основываются на использовании групп пальцев, кучек камней и т. п. с дополнительными соглашениями о замене некоторой группы, скажем, из пяти или десяти объектов одним объектом специального вида или объектом, расположенным в специальном месте. Подобные системы естественно приводят к наиболее ранним из известных способам представления чисел в письменном виде, таким как вавилонские, египетские, греческие, китайские и римские числа, но такого рода обозначения чрезвычайно неудобны для выполнения арифметических операций, кроме разве что простейших случаев.

Глубокий анализ древних клинописных табличек, обнаруженных археологами на Среднем Востоке, который выполнен историками математики в 20 столетии, показал, что вавилоняне применяли фактически две различные системы представления чисел. Числа, которые использовались при ведении повседневных деловых записей, записывались при помощи унаследованных от более ранних цивилизаций Месопотамии обозначений, основанных на группировании по десяткам, сотням и т. д. При этом необходимость в операциях с большими числами возникала редко. При решении более сложных математических задач вавилонские математики широко использовали шестидесятеричную (по основанию шестьдесят) позиционную систему, достаточно хорошо разработанную к 1750 г. до н. э. Эта числовая система была уникальной в том смысле, что она фактически была формой представления с *плавающей точкой* с опущенным показателем степени; соответствующий масштабный множитель, или степень шестидесяти, определялся из контекста, так что, например, числа 2, 120, 7200, $\frac{1}{30}$ и т. д. записывались одинаково. Особенно удобно было пользоваться этой системой для умножения и деления при помощи вспомогательных таблиц, поскольку выравнивание порядков никак не влияло на ответ. Примером такой вавилонской системы записи может служить выписка из древних таблиц "Квадрат 30 есть 15" (что можно прочесть, как "Квадрат $\frac{1}{2}$ есть $\frac{1}{4}$"; "Число, обратное $81 = (1\ 21)_{60}$, равно $(44\ 26\ 40)_{60}$"; "Квадрат этого числа равен $(32\ 55\ 18\ 31\ 6\ 40)_{60}$"). У вавилонян был символ для обозначения нуля, но из-за их идеологии обращения с плавающей точкой он использовался между цифрами, но никогда — в крайней справа позиции для обозначения масштаба. Об интересной истории ранней вавилонской математики можно прочесть в книгах O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1952), B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, переведенной на английский А. Дрезденом (A. Dresden) (Groningen: P. Noordhoff, 1954)*, а также D. E. Knuth, *CACM* **15** (1972), 671–677; **19** (1976), 108.

Позиционная система с фиксированной точкой, очевидно, впервые появилась в Центральной Америке у индейцев Майя около 2 000 лет тому назад. Их система счисления по основанию двадцать была достаточно хорошо продуманной, особенно если учесть потребности в записи астрономических наблюдений и календарных дат.

Индейцы Центральной Америки ввели в употребление письменный знак для нуля около 200 г. н. э. Однако испанские завоеватели уничтожили почти все книги Майя по истории и науке, поэтому нам трудно судить об уровне абстракции, достигнутом аборигенами Америки в арифметике. Были найдены таблицы умножения специального назначения, но не обнаружено никаких примеров по делению. (См. J. Eric S. Thompson, *Contributions to Amer. Anthropology and History* **7** (Carnegie Inst. of Washington, 1941), 37–67; J. Justeson, "Ancient Mesoamerican computing practices", *History of Science* **3** (Rome: Istituto della Enciclopedia Italiana), в печати.)

За несколько столетий до новой эры греки применяли для своих вычислений раннюю разновидность счетной доски (абаки), используя песок и/или гальку на доске с начерченными строками и столбцами, которые естественным образом соответствуют нашей десятичной системе. Нам, привыкшим выполнять расчеты при помощи карандаша и бумаги, скорее всего, покажется странным, что тот же позиционный принцип никогда не применялся ими для записи чисел, ведь мы так к нему

* Имеется русский перевод книги: Б. Л. Ван дер Варден, Пробуждающаяся наука, Физматгиз, 1959. — *Прим. перев.*

привыкли. Но бо́льшая простота вычислений на абаке (писать тогда умели далеко не все; кроме того, вычисления на абаке делали ненужным запоминание таблиц сложения и умножения), вероятно, привела греков к убеждению, что нелепо даже предполагать, что вычисления удобнее выполнять, "царапая на бумаге". В то же время греческие астрономы для записи дробей использовали шестидесятеричную систему счисления, чему они научились у вавилонян.

Привычная нам десятичная система, отличающаяся от более ранних форм прежде всего наличием фиксированной разделяющей точки, а также использованием символа нуля для обозначения пустой позиции, впервые появилась в Индии. Точная дата возникновения этой системы неизвестна, но есть основания полагать, что это произошло около 6 в. н. э. Индусская наука того времени достигла довольно высокого уровня развития, в частности это относится к астрономии. В наиболее ранних известных индийских манускриптах, в которых применяется десятичная система, числа записываются в обратном порядке (с наиболее значимой цифрой справа), но позднее стало правилом расположение наиболее значимой цифры слева.

Около 750 г. н. э. на арабский язык было переведено несколько важных работ индусских математиков, и принципы десятичной арифметики таким образом попали в Персию. Живописное описание этого периода можно найти в древнееврейской рукописи Абрахама Ибн Эзра (Abraham Ibn Ezra), перевод которой на английский язык опубликован в журнале *AMM* **25** (1918), 99–108. Вскоре после этого аль-Хорезми написал на арабском языке свое руководство. (Как отмечалось в главе 1, слово "алгоритм" произошло от его имени.) Книга аль-Хорезми была переведена на латынь и оказала значительное влияние на Леонардо Пизано (Фибоначчи) (Leonardo Pisano (Fibonacci)), чья книга по арифметике (1202 г.), в свою очередь, сыграла решающую роль в распространении индо-арабских методов работы с числами в Европе. Интересно отметить, что в результате такого двойного перевода порядок записи чисел (слева направо) не изменился, хотя арабы пишут справа налево, а индусы и европейцы — слева направо. Подробно процесс распространения десятичной нумерации и арифметики по всей Европе с 1200 по 1600 год описан в книге David Eugene Smith *History of Mathematics* **1** (Boston: Ginn and Co., 1923), гл. 6 и 8.

Вначале десятичная система счисления применялась только к целым числам (для операций с дробями она не использовалась). Арабские астрономы, которым для составления карт звездного неба и других астрономических таблиц приходилось применять дроби, продолжали пользоваться системой знаменитого греческого астронома Птолемея, основанной на шестидесятеричных дробях. Эта система единиц — рудимент шестидесятеричной системы вавилонян — дожила до наших дней и используется для измерения угловых градусов, минут и секунд, а также для некоторых единиц измерения времени. Использовались первыми европейскими математиками и шестидесятеричные дроби, когда приходилось иметь дело с нецелыми числами. К примеру, Фибоначчи приводил значение

$$1^\circ\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 40^{VI}$$

в качестве приближенного корня уравнения $x^3+2x^2+10x=20$. (Правильный ответ: $1^\circ\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 38^{VI}\ 30^{VII}\ 50^{VIII}\ 15^{IX}\ 43^{X}\ \ldots$.)

Кажется, не так уж много нужно изменить, чтобы использовать десятичные обозначения для десятых, сотых и других угловых и временны́х параметров, но, конечно, ломать традиции всегда трудно, тем более что шестидесятеричные дроби имеют преимущество перед десятичными дробями в том, что такие числа, как $\frac{1}{3}$, могут быть записаны точно и просто.

Китайские математики — кстати, никогда не пользовавшиеся шестидесятеричной системой, — вероятно, были первыми, кто стал работать с величинами, эквивалентными десятичным дробям, хотя их числовая система (без нуля) и не была в строгом смысле позиционной. Китайские единицы мер и весов были десятичными, так что Цзу Чун-Чи (умер в 501 г.) смог аппроксимировать число π в следующем виде:

3 чана, 1 чжи, 4 цуня, 1 фэн, 5 ли, 9 хао, 2 мяо, 7 ху.

Здесь чан, ..., ху — единицы длины; 1 ху (диаметр шелковой нити) равен 1/10 мяо и т. д. Использование дробей, столь похожих на десятичные, получило в Китае довольно широкое распространение после примерно 1250 года. Начальная форма истинно десятичных дробей появилась в 10 веке в трактате по арифметике, написанном в Дамаске неизвестным математиком, который подписался именем "аль-Уклидиси" (последователь Евклида). Он ввел обозначение места размещения десятичной точки, в частности в связи с проблемой умножения 135 на $(1.1)^n$ для $1 \leq n \leq 5$. (См. A. S. Saidan, *The Arithmetic of al-Uqlīdisī* (Dordrecht: D. Reidel, 1975), 110, 114, 343, 355, 481–485.) Но аль-Уклидиси не развил идею до конца, и его трактат вскоре был забыт. Из датированного 1172 годом трактата аль-Самайяля, который жил и работал в Багдаде и Баку, следует, что ему был известен способ вычисления $\sqrt{10} = 3.162277\ldots$, но он не нашел подходящего способа записи результата. Через несколько столетий десятичные дроби были заново открыты арабским (среднеазиатским) математиком аль-Каши, умершим в 1429 году*. Аль-Каши был весьма искусен в выполнении всяческих вычислений и нашел следующее значение для 2π, содержащее 16 правильных десятичных знаков.

Целые		Дроби															
0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5

Это было наилучшее приближение к π до тех пор, пока Лудольф ван Цейлен (Ludolph van Ceulen), выполнив в течение 1596–1610 годов огромный объем работ, не вычислил 35 десятичных знаков.

Самый ранний пример операций с десятичными дробями в Европе обнаружен в одном тексте, написанном в 15 веке, где, например, 153.5 умножается на 16.25 и в ответе получается 2494.375. Используемый при этом метод был назван "турецким". В 1525 году Кристоф Рудольф (Christof Rudolff) из Германии самостоятельно открыл десятичные дроби, но, как и работа аль-Уклидиси, его работа осталась практически незамеченной. Франсуа Виет (François Viète) эту идею высказал снова в 1579 году. Наконец, в 1585 году приобрел популярность трактат по арифметике, написанный Симоном Стевином (Simon Stevin) из Бельгии, который самостоятельно пришел к идее десятичных дробей. Работа Стевина и последовавшее вскоре открытие логарифмов привели к тому, что в течение 17 века десятичные дроби стали общепринятыми повсюду в Европе. [Подробности и ссылки на литературу можно

* В БСЭ приведен другой год смерти — около 1436–1437. — *Прим. перев.*

найти в книгах D. E. Smith, *History of Mathematics* **2** (Boston: Ginn and Co., 1925), 228–247, и V. J. Katz, *A History of Mathematics* (New York: HarperCollins, 1993).]

Двоичная система счисления имеет собственную интересную историю. Известно, что многие племена, ведущие в наше время первобытный образ жизни, используют двоичную, или парную, систему счета (группирование по два, а не по пять или десять), но было бы ошибкой утверждать, что они действительно считают в двоичной системе, так как при этом степени двойки никоим образом не выделяются. Интересные подробности о примитивных числовых системах можно найти в статье Abraham Seidenberg *The Diffusion of Counting Practices Univ. of Calif. Publ. in Math.* **3** (1960), 215–300. Другой "примитивный" пример двоичной системы — музыкальная нотация (для обозначения ритма и длительности нот). В 17 веке предметом обсуждения в Европе были недесятичные системы. В течение многих лет астрономы от случая к случаю использовали шестидесятеричную арифметику как для целых, так и для дробных частей чисел, главным образом, при выполнении умножения (см. John Wallis, *Treatise of Algebra* (Oxford, 1685), 18–22, 30). Тот факт, что *любое* целое, большее 1, может служить основанием для системы счисления, впервые опубликован около 1658 года Блезом Паскалем (Blaise Pascal) в *De Numeris Multiplicibus*. [См. полное собрание сочинений Паскаля *Œuvres Complètes* (Paris: Éditions du Seuil, 1963), 84–89.] Паскаль писал: "Denaria enim ex instituto hominum, non ex necessitate naturæ ut vulgus arbitratur, et sane satis inepte, posita est", т. е. "Десятичная система построена довольно неразумно, в соответствии с человеческими обычаями, а вовсе не с требованиями естественной необходимости, как склонно думать большинство людей". Он утверждал, что было бы желательно перейти к двенадцатеричной (по основанию двенадцать) системе, и предложил правило проверки делимости двенадцатеричного числа на 9. Эрхард Вайгель (Erhard Weigel) в ряде публикаций начиная с 1673 года пытался пробудить интерес к четверичной (по основанию четыре) системе счисления. Подробное обсуждение арифметики по основанию двенадцать было проведено Джошуа Джордэйном (Joshua Jordaine) в работе *Duodecimal Arithmetick* (London, 1687).

Хотя в арифметике на протяжении всей этой эпохи применялась почти исключительно десятичная система счисления, системы мер и весов редко основывались (если вообще основывались) на кратности десяти, и для ведения многих торговых операций требовалась изрядная доля умения складывать величины наподобие фунтов, шиллингов и пенсов. Поэтому на протяжении столетий купцы учились складывать и вычитать величины, выражаемые специфическими денежными единицами, единицами мер и весов, а это фактически была арифметика в недесятичной системе счисления. Особого внимания заслуживают, в частности, основные единицы измерения объема жидкости в Англии, установившиеся еще в 13 веке или даже раньше.

$$
\begin{aligned}
2 \text{ джила} &= 1 \text{ полуштоф}\\
2 \text{ полуштофа} &= 1 \text{ пинта}\\
2 \text{ пинты} &= 1 \text{ кварта}\\
2 \text{ кварты} &= 1 \text{ потл}\\
2 \text{ потла} &= 1 \text{ галлон}\\
2 \text{ галлона} &= 1 \text{ пек}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ пека} &= 1 \text{ полубушель} \\ 2 \text{ полубушеля} &= 1 \text{ бушель или фиркин} \\ 2 \text{ фиркина} &= 1 \text{ килдеркин} \\ 2 \text{ килдеркина} &= 1 \text{ баррель} \\ 2 \text{ барреля} &= 1 \text{ хогсхед} \\ 2 \text{ хогсхеда} &= 1 \text{ пайп} \\ 2 \text{ пайпа} &= 1 \text{ тан} \end{aligned}$$

Объемы жидкости, выраженные в галлонах, потлах, квартах, пинтах и т. д., по существу, записывались в двоичной системе. Быть может, подлинными изобретателями двоичной арифметики были английские виноторговцы!

Насколько сейчас известно, впервые чисто двоичная система счисления появилась в 1605 году в нескольких неопубликованных работах Томаса Хэрриота (Thomas Harriot) (1560–1621). Хэрриот был личностью творческой и приобрел известность по прибытии в Америку в качестве представителя сэра Уолтера Рэлея (Walter Raleigh). Он изобрел (среди всего прочего) символы для обозначения отношений "меньше" и "больше", используемые и ныне, но по некоторым соображениям предпочел не публиковать большинство своих открытий. Выдержки из его заметок по двоичной арифметике воспроизведены Джоном У. Ширли (John W. Shirley) в журнале *Amer. J. Physics* **19** (1951), 452–454. Впервые заметки Хэрриота относительно двоичной системы были процитированы Морли (Morley) и появились в журнале *The Scientific Monthly* **14** (1922), 60–66.

Первый опубликованный анализ двоичной системы появился в работе испанского священника Хуана де Карамюэля Лобковица (Juan de Caramuel Lobkowitz) *Mathesis Biceps* **1** (Campaniæ, 1670), 45–48. Карамюэль рассмотрел представление чисел в системах по основаниям 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 и 60, но не привел никаких примеров арифметических операций в недесятичных системах, кроме шестидесятеричной системы.

Наконец, статья Г. В. Лейбница (G. W. Leibniz) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (Paris, 1703), 110–116, в которой были описаны сложение, вычитание, умножение и деление в двоичной системе, действительно привлекла к этой системе всеобщее внимание, и именно на эту статью ссылаются, говоря о рождении арифметики по основанию 2. Лейбниц и в дальнейшем очень часто обращался к двоичной системе счисления. Он не рекомендовал ее для практических вычислений, однако подчеркивал важность этой системы в теории чисел, так как закономерности поведения числовых последовательностей часто гораздо легче усмотреть в двоичной записи, чем в десятичной. Он также вкладывал некий мистический смысл в тот факт, что все в мире можно выразить с помощью нулей и единиц. Неопубликованные работы Лейбница показывают, что он интересовался двоичной системой счисления еще в 1679 году, когда ссылался на нее как на систему "bimal" (аналогично "десятичной").

Подробное исследование ранних работ Лейбница по двоичным числам выполнено Гансом Й. Захером (Hans J. Zacher) в работе *Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz* (Frankfurt am Main: Klostermann, 1973). Захер отмечал, что, предложив способ вычислений при помощи камней, ориентированных на использование абаки по основанию 2, Лейбниц стал близок к так называемой "локальной арифметике" Джона Непера. Непер в 1617 году опубликовал идею локальной арифметики в приложении к своей маленькой книге *Rhabdologia*. Эта идея может трактоваться как первая в мире "двоичная машина", тем более что она была самой дешевой машиной в мире, хотя Непер и чувствовал, что это не машина, а, скорее, игрушка. (См. обзор Мартина Гарднера (Martin Gardner) *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments* (New York: Freeman, 1986), гл. 8.)

Интересно отметить, что в то время важная концепция отрицательных степеней числа справа от разделяющей точки еще не была по-настоящему осознана. Лейбниц попросил Якова Бернулли (James Bernoulli) вычислить π в двоичной системе счисления, и Бернулли решил задачу. Он вычислил 35-значное приближение к π, умножил его на 10^{35}, а затем, выразив полученное целое число в двоичной системе счисления, получил искомый ответ! Для меньшего масштабного множителя это рассуждение выглядело бы как $\pi \approx 3.14$, а $(314)_{10} = (100111010)_2$; следовательно, π в двоичной системе счисления равно 100111010! (См. Leibniz, *Math. Schriften*, edited by K. Gehrhardt, **3** (Halle, 1855), 97; из-за ошибок в вычислениях два из 118 бит в ответе неверны.) Бернулли, скорее всего, выполнил эти вычисления, чтобы в таком представлении числа π выявить какие-либо простые закономерности.

Шведский король Карл XII, математический талант которого, возможно, превосходил таланты всех остальных королей в мировой истории, около 1717 года увлекся восьмеричной арифметикой. Скорее всего, это было его собственное изобретение, хотя он и встречался с Лейбницем в 1707 году. Карлу казалось, что основание 8 или 64 было бы более удобным для вычислений, чем 10, и он собирался ввести восьмеричную систему в Швеции, но погиб в битве, так и не успев провести эту реформу. (См. *Сочинения Вольтера (Voltaire)* **21** (Paris, E. R. DuMont, 1901), 49; E. Swedenborg, *Gentleman's Magazine* **24** (1754), 423–424.)

Восьмеричная система счисления была также предложена в Американских колониях Хью Джонсом (Hugh Jones), профессором колледжа "Уильям и Мэри" около 1750 года (см. *Gentleman's Magazine* **15** (1745), 377–379; H. R. Phalen, *AMM* **56** (1949), 461–465).

Спустя столетие выдающийся американский инженер, швед по национальности, Джон Нистром (John W. Nystrom) решил сделать еще один шаг в развитии идей Карла XII и предложил полную систему нумерации, мер и весов, основанную на шестнадцатеричной арифметике. Он писал: "Я не боюсь и не колеблюсь выступить в защиту двоичной системы в арифметике и метрологии. Я знаю, на моей стороне природа; если мне не удастся убедить вас в ее полезности и чрезвычайной важности для человечества, это не сделает чести ни нашему поколению, ни нашим ученым и философам". Нистром разработал специальные правила произношения шестнадцатеричных чисел; например, $(\texttt{C0160})_{16}$ следовало читать как "вибонг, бисантон" (vybong, bysanton). Полная система была им названа тональной и описана в *J. Franklin Inst.* **46** (1863), 263–275, 337–348, 402–407. Аналогичная система, но использующая основание 8, была предложена Альфредом Б. Тэйлором (Alfred B. Taylor) и описана в *Proc. Amer. Pharmaceutical Assoc.* **8** (1859), 115–216; *Proc. Amer. Philosophical Soc.* **24** (1887), 296–366.

Со времен Лейбница двоичная система счисления становится хорошо известной диковинкой, и Р. К. Арчибальд (R. C. Archibald) собрал более 20 посвященных ей ранних работ [*AMM* **25** (1918), 139–142]. Она применялась, главным образом, для вычисления степеней, как будет объяснено в разделе 4.6.3, а также при анализе некоторых игр и головоломок. Джузеппе Пеано (Giuseppe Peano) использовал двоичную систему как базис "логического" алфавита из 256 символов [*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* **34** (1898), 47–55]. Джозеф Боуден (Joseph Bowden) предложил систему обозначений для шестнадцатеричных чисел [*Special Topics in Theoretical Arithmetic* (Garden City, 1936), 49].

В книге Антона Глэйзера (Anton Glaser) *History of Binary and Other Nondecimal Numeration* (Los Angeles: Tomash, 1981) приведена подробная информация и практически исчерпывающий анализ развития двоичной системы, включая перевод на английский язык многих работ, процитированных выше (см. *Historia Math.* **10** (1983), 236–243).

Большинство современных числовых систем связано с развитием вычислительных машин. Из заметок Чарльза Бэббиджа (Charles Babbage) 1838 года понятно, что он задумывался над использованием в своей аналитической машине недесятичных чисел (см. M. V. Wilkes, *Historia Math.* **4** (1977), 421). Повышенный интерес к механическим устройствам для выполнения арифметических операций, особенно умножения, побудил в 30-х годах ряд исследователей обратить внимание на двоичную систему. Прекрасный отчет об этих исследованиях вместе с записью дискуссии, состоявшейся после прочитанной им на данную тему лекции приведен в статье Э. Уильяма Филлипса (E. William Phillips) "Двоичные вычисления" [*Journal of the Institute of Actuaries* **67** (1936), 187–221]. Филлипс начал статью словами "Конечная цель (этой статьи) состоит в том, чтобы убедить весь цивилизованный мир отказаться от десятичной нумерации и заменить ее восьмеричной".

Современные читатели статьи Филлипса, возможно, будут удивлены, обнаружив, что система счисления по основанию 8 называлась в то время в соответствии со всеми словарями английского языка "octonary" или "octonal", точно так, как система по основанию 10 называлась "denary" или "decimal". Слово "octal" появилось в английском языке только после 1961 года, причем первоначально, скорее всего, как термин для описания конструкции цоколя определенного класса вакуумных электронных ламп. Слово "hexadecimal", которое вкралось в английский язык еще позже, представляет собой смесь греческого и латинского корней. Более корректными терминами должны были быть либо "senidenary", либо "sedecimal", либо даже "sexadecimal", но последний, пожалуй, для программистов звучал бы слишком рискованно.

Высказывание Ф. Х. Уэйлса, приведенное в качестве одного из эпиграфов к этой главе, извлечено из записи дискуссии, опубликованной вместе со статьей Филлипса. Другой слушатель лекции указал на неудобства восьмеричной системы для деловых целей: 5% "превращается в $3.\dot{1}46\dot{3}$ per 64, что звучит довольно ужасно"*.

Филлипса вдохновила возможность реализации его идей в устройствах, работающих на электронных лампах и способных выполнять вычисления в двоичном коде [C. E. Wynn-Williams, *Proc. Roy. Soc. London* **A136** (1932), 312–324].

Во второй половине 30-х годов Джон В. Атанасофф (John V. Atanasoff) и Джордж Р. Штибитц (George R. Stibitz) в США, Л. Куффигнал (L. Couffignal) и Р. Валта (R. Valtat) во Франции, а также Гельмут Шрейер (Helmut Schreyer) и

---

* Поскольку слово "процент" на английском языке пишется как "per cent" (от лат. "per centum"), а "cent" (100) заменяется числом 64. — *Прим. перев.*

Конрад Цузе (Konrad Zuse) в Германии разработали первые электромеханические и электронные машины для выполнения арифметических операций. Все они использовали двоичную систему счисления, хотя позже Штибитц разработал и двоичный код "с избытком 3" для десятичных цифр. Обобщенный обзор этих ранних достижений, включая переводы и копии наиболее значимых современных документов, содержится в книге Brian Randell *The Origins of Digital Computers* (Berlin: Springer, 1973).

В первых быстродействующих вычислительных машинах, созданных в США в начале 40-х годов, использовалась десятичная арифметика. Но в 1946 году в сыгравшем важную роль отчете А. В. Беркса (A. W. Burks), Г. Г. Голдстайна (H. H. Goldstine) и Дж. фон Неймана (J. von Neumann) о проекте первой вычислительной машины с хранимой в памяти программой были подробно изложены причины, которые побудили их порвать с традицией и перейти к системе счисления по основанию 2 (см. John von Neumann, *Collected Works* **5**, 41–65). С тех пор двоичные вычислительные устройства получили всеобщее распространение. После первой дюжины лет работы с двоичными машинами в статье В. Буххольца (W. Buchholz) "Fingers or Fists?" [*CACM* **2** (December, 1959), 3–11] был выполнен анализ сравнительных достоинств и недостатков двоичной системы счисления.

Структура компьютера `MIX`, используемого в этой книге, такова, что машина может быть как двоичной, так и десятичной. Интересно отметить, что почти все программы для этого компьютера можно написать, не зная, какая именно система используется (двоичная или десятичная), даже при выполнении вычислений с многократной точностью. Итак, мы видим, что на методику программирования для компьютера выбор основания системы счисления не оказывает значительного влияния. (Заслуживает упоминания исключение из этого правила — операции "булевой" алгебры, рассматриваемые в разделе 7.1; см. также алгоритм 4.5.2.)

Отрицательные числа могут быть представлены в компьютере несколькими способами. Выбор того или иного способа зачастую оказывает влияние на метод реализации арифметических операций. Поясним сказанное. Сначала будем считать машину `MIX` десятичной; тогда каждое слово состоит из десяти цифр и знака, например

$$-12345\ 67890. \qquad (2)$$

Этот способ представления называется *абсолютным значением со знаком**. Такое представление соответствует общепринятым обозначениям, и поэтому его предпочитают многие программисты. Возможное неудобство заключается в том, что допускается существование как "минус нуль", так и "плюс нуль", в то время как эти разные коды должны обозначать одно и то же число. На практике такая возможность требует принятия определенных мер предосторожности.

В большинстве механических счетных машин, выполняющих действия десятичной арифметики, используется другая система записи — *дополнение до десяти***. Если вычесть 1 из 00000 00000, в этой системе записи получим 99999 99999; другими

* В общепринятой русскоязычной терминологии этому понятию соответствует термин ***прямой код***. — *Прим. перев.*

** В общепринятой русскоязычной терминологии этому понятию соответствует термин ***дополнительный код***. — *Прим. перев.*

словами, числу явно не приписывается знак, а вычисления выполняются по модулю 10^{10}. Число $-12345\ 67890$ в форме дополнения до десяти будет выглядеть так:

$$87654\ 32110. \tag{3}$$

В этой системе обозначений принято считать отрицательным любое число, головная цифра которого — 5, 6, 7, 8 или 9, хотя с точки зрения сложения и умножения не будет большим грехом рассматривать (3), если это удобно, как число $+87654\ 32110$. Попутно отметим, что в такой системе не возникает проблема "минус нуль".

На практике основное различие между двумя описанными формами представления заключается в том, что сдвиг вправо дополнения до десяти не эквивалентен делению на 10; к примеру, число $-11 = \ldots 99989$ после сдвига вправо на одну позицию превращается в $\ldots 99998 = -2$ (в предположении, что сдвиг вправо отрицательного числа порождает в головном разряде "9"). В общем случае результатом сдвига числа x, записанного в формате дополнения до десяти, на одну позицию вправо будет число $\lfloor x/10 \rfloor$, независимо от того, положительно или отрицательно число x.

Одним из возможных неудобств записи в формате дополнения до десяти является несимметричность относительно нуля. Наибольшее отрицательное число, представимое p цифрами, есть $500\ldots0$, и оно не является результатом обращения знака никакого p — разрядного положительного числа. Таким образом, возможно, изменение знака, т. е. замена x на $-x$, приведет к переполнению. (См. упр. 7 и 31, в которых обсуждается формат дополнения до основания системы счисления, который имеет *бесконечную* точность.)

Еще одна система обозначений, принятая с самых первых дней эры быстродействующих вычислительных машин, — это представление в виде *дополнения до всех девяток**.

В этом случае число $-12345\ 67890$ записывается в виде

$$87654\ 32109. \tag{4}$$

Каждая цифра отрицательного числа $(-x)$ равна разности между 9 и соответствующей цифрой числа x. Нетрудно видеть, что для отрицательного числа дополнение до девяти всегда на единицу меньше соответствующего дополнения до десяти. Сложение и вычитание производятся по модулю $10^{10} - 1$, а это означает, что перенос из крайней слева позиции добавляется к крайней справа (см. описание арифметики по модулю $w - 1$ в разделе 3.2.1.1). Опять возникает проблема с "минус нулем", так как записи 99999 99999 и 00000 00000 обозначают одно и то же значение.

Только что изложенные идеи для арифметики по основанию 10 в полной мере применимы и к арифметике по основанию 2; здесь мы имеем *абсолютную величину со знаком, дополнение до двух и дополнение до одного***.

Арифметика в дополнительном коде — это арифметика по модулю 2^n, а арифметика в обратном коде — по модулю $2^n - 1$. Машина MIX имеет дело только с прямым кодом, что и используется в примерах этой главы. Тем не менее в сопроводитель-

---

* В общепринятой русскоязычной терминологии этому понятию соответствует термин *обратный код*. — *Прим. перев.*

** В общепринятой русскоязычной терминологии этим понятиям соответствуют термины *прямой*, *обратный* и *дополнительный* код, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. — *Прим. перев.*

ном тексте рассматриваются, если в этом есть необходимость, и альтернативные варианты процедур для дополнительного и обратного кодов.

Скрупулезные читатели и редакторы английского текста, вероятно, отметили положение апострофа в терминах "two's complement" (дополнение до *двойки*) и "ones' complement" (дополнение до *единиц*). В первом случае каждая цифра дополняется до первой степени двойки, а во втором весь код есть дополнение до кода, представленного единицами во всех разрядах. По аналогии с "ones' complement" может существовать и формат "twos' complement" (дополнение до *двоек*), который используется в системе счисления по основанию 3 и является дополнением до $(2\ldots22)_3$.

В руководствах по машинному языку программирования часто указывается, что схемотехника компьютера позволяет настраивать конкретное положение разделяющей точки в каждом машинном слове. На это сообщение не стоит обращать внимание. Целесообразнее изучить правила размещения разделяющей точки в результате выполнения каждой конкретной команды, если предположить, что до ее выполнения точки в операндах были расположены в каком-то определенном месте. Например, в случае машины MIX можно было бы рассматривать наши операнды либо как целые числа с разделяющей точкой в крайнем справа положении, либо как правильные дроби с разделяющей точкой в крайнем слева положении, либо как некоторые промежуточные варианты. Правила установки разделяющей точки после осуществления операций сложения, вычитания, перемножения и деления определяются очевидным образом и следуют из алгоритмов выполнения этих операций.

Легко видеть, что между записью чисел в системах по основанию b и b^k существует простая связь:

$$(\ldots a_3a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\ldots)_b = (\ldots A_3A_2A_1A_0.A_{-1}A_{-2}\ldots)_{b^k}, \tag{5}$$

где

$$A_j = (a_{kj+k-1}\ldots a_{kj+1}a_{kj})_b$$

(см. упр. 8). Таким образом, получается простой способ перехода "чисто визуального" от, скажем, двоичной системы к шестнадцатеричной.

Помимо стандартных систем по основанию b, обсуждавшихся выше, существует множество других интересных вариантов позиционных систем счисления. Например, можно было бы рассматривать числа по основанию (-10), так что

$$\begin{aligned}&(\ldots a_3a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\ldots)_{-10}\\ &\qquad = \cdots + a_3(-10)^3 + a_2(-10)^2 + a_1(-10)^1 + a_0 + \cdots\\ &\qquad = \cdots - 1000a_3 + 100a_2 - 10a_1 + a_0 - \tfrac{1}{10}a_{-1} + \tfrac{1}{100}a_{-2} - \cdots.\end{aligned}$$

Здесь, как и в традиционной десятичной системе, цифры удовлетворяют неравенствам $0 \le a_k \le 9$. Число 12345 67890 запишется в такой "негадесятичной" системе в виде

$$(1\ 93755\ 73910)_{-10}, \tag{6}$$

так как оно равно как раз 10305070900 − 9070503010. Интересно отметить, что обращение этого числа, −12345 67890, запишется в виде

$$(28466\ 48290)_{-10}. \tag{7}$$

И действительно, любое вещественное число, положительное или отрицательное, может быть представлено без знака в системе по основанию −10.

Системы по отрицательному основанию впервые описаны Витторио Грюнвальдом (Vittorio Grunwald) в *Giornale di Matematiche di Battaglini* **23** (1885), 203–221, 367. В этой работе изложены правила выполнения в таких системах четырех арифметических действий, а также рассмотрены правила извлечения корня, проверка делимости и перевод из одной системы счисления в другую. Однако, похоже, работа Грюнвальда осталась незамеченной, так как она была опубликована в довольно заштатном журнале и вскоре забыта. Следующее исследование по системам счисления по отрицательному основанию опубликовал О. Дж. Кемпнер (A. J. Kempner) в *AMM* **43** (1936), 610–617. В этой работе он рассмотрел свойства систем счисления с нецелыми основаниями и отметил в примечаниях, что системы счисления с отрицательными основаниями также будут иметь право на существование. Двадцать лет спустя эта идея снова была предложена; на этот раз — З. Павляком (Z. Pawlak) и А. Вакуличем (A. Wakulicz) [*Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, Classe III, **5** (1957), 233–236; Série des sciences techniques **7** (1959), 713–721], а также Л. Уэйделом (L. Wadel) [*IRE Transactions* **EC-6** (1957), 123]. Экспериментальные вычислительные машины SKRZAT 1 и BINEG, в которых −2 использовалось в качестве основания системы, были сделаны в Польше в конце 50-х годов (см. N. M. Blachman, *CACM* **4** (1961), 257; R. W. Marczyński, *Ann. Hist. Computing* **2** (1980), 37–48). Дополнительные ссылки на литературу приводятся в журналах *IEEE Transactions* **EC-12** (1963), 274–276; *Computer Design* **6** (May, 1967), 52–63. Можно полагать, что идея отрицательного основания возникла независимо сразу у целого ряда авторов. Например, Д. Э. Кнут в небольшом машинописном тексте, предназначенном для конкурса "Поиск научных талантов" среди учеников старших классов, в 1955 году обсуждал системы счисления с отрицательными основаниями. Там же обсуждалось и дальнейшее распространение этой идеи на основания, являющиеся комплексными числами.

Выбор основания $2i$ приводит к интересной системе счисления, которую естественно назвать "мнимочетверичной" (по аналогии с "четверичной"). Такая система обладает необычным свойством, заключающимся в том, что в ней любое комплексное число может быть представлено без знака при помощи цифр $0, 1, 2$ и 3. (См. D. E. Knuth, *CACM* **3** (1960), 245–247.) Например,

$$(11210.31)_{2i} = 1\cdot 16 + 1\cdot(-8i) + 2\cdot(-4) + 1\cdot(2i) + 3\cdot(-\tfrac{1}{2}i) + 1(-\tfrac{1}{4}) = 7\tfrac{3}{4} - 7\tfrac{1}{2}i.$$

Здесь число $(a_{2n}\ldots a_1 a_0.a_{-1}\ldots a_{-2k})_{2i}$ равно

$$(a_{2n}\ldots a_2 a_0.a_{-2}\ldots a_{-2k})_{-4} + 2i(a_{2n-1}\ldots a_3 a_1.a_{-1}\ldots a_{-2k+1})_{-4},$$

так что перевод числа в мнимочетверичную форму и обратно сводится к переводу в "негачетверичную" форму и обратно действительной и мнимой частей числа. Интересное свойство этой системы заключается в том, что она позволяет единообразно выполнять умножение и деление комплексных чисел без разделения действительной и мнимой частей. Например, в этой системе можно перемножить два числа так же, как при любом другом основании, но при этом нужно использовать несколько иное “правило переноса”: в случае, если цифра становится больше 3, вычесть 4 — и -1 “перенесется” на два разряда влево; когда же цифра отрицательна, к ней прибавляется 4 и $+1$ “переносится” на два разряда влево. Проиллюстрируем это своеобразное правило переноса следующим примером.

$$
\begin{array}{ccccccccc@{\qquad}l}
 & & & & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & [9-10i] \\
 & & & & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & [9-10i] \\
\cline{5-9}
 & & & & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & \\
1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & & \\
 & & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & & & \\
 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & & & & \\
1 & 2 & 2 & 3 & 1 & & & & & \\
\hline
0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 & [-19-180i]
\end{array}
$$

Аналогичную систему, в которой используются лишь цифры 0 и 1, можно построить и по основанию $\sqrt{2}\,i$. Однако в ней для представления мнимой единицы i требуется бесконечное непериодическое разложение. Витторио Грюнвальд (Vittorio Grunwald) предложил разрешить эту проблему, используя цифры 0 и $1/\sqrt{2}$ в нечетных позициях, однако это фактически испортило всю систему. (См. *Commentari dell'Ateneo di Brescia* (1886), 43–54.)

Используя основание $i-1$, можно также получить “бинарную” комплексную систему счисления, предложенную У. Пенни (W. Penney) [*JACM* **12** (1965), 247–248]:

$$
\begin{aligned}
&(\ldots a_4a_3a_2a_1a_0.a_{-1}\ldots)_{i-1} \\
&\qquad = \cdots - 4a_4 + (2+2i)a_3 - 2ia_2 + (i-1)a_1 + a_0 - \tfrac{1}{2}(i+1)a_{-1} + \cdots .
\end{aligned}
$$

В ней задействованы только цифры 0 и 1. Продемонстрировать, что любое комплексное число допускает такое представление, можно, рассмотрев интересное множество S, приведенное на рис. 1. Это множество по определению состоит из всех точек, которые могут быть записаны в виде $\sum_{k\ge1} a_k(i-1)^{-k}$ для бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, … нулей и единиц. Она известна также как “двуглавый дракон” (см. M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, second edition (Academic Press, 1993), 306, 310). На рис. 1 показано, что множество S можно разбить на 256 частей, конгруэнтных $\frac{1}{16}S$. Заметим, что если множество S повернуть по часовой стрелке на 135°, то оно распадется на два примыкающих одно к другому множества, конгруэнтных $(1/\sqrt{2})\,S$, поскольку $(i-1)S = S \cup (S+1)$. Детально доказательство того, что множество S содержит все комплексные числа, достаточно малые по модулю, рассмотрено в упр. 18.

Быть может, самой изящной из всех систем счисления является *уравновешенная троичная* система счисления (по основанию 3), в которой вместо цифр 0, 1 и 2 используются “триты” (троичные цифры) -1, 0 и $+1$. Заменив -1 символом $\bar{1}$, получим следующие примеры уравновешенных троичных чисел.

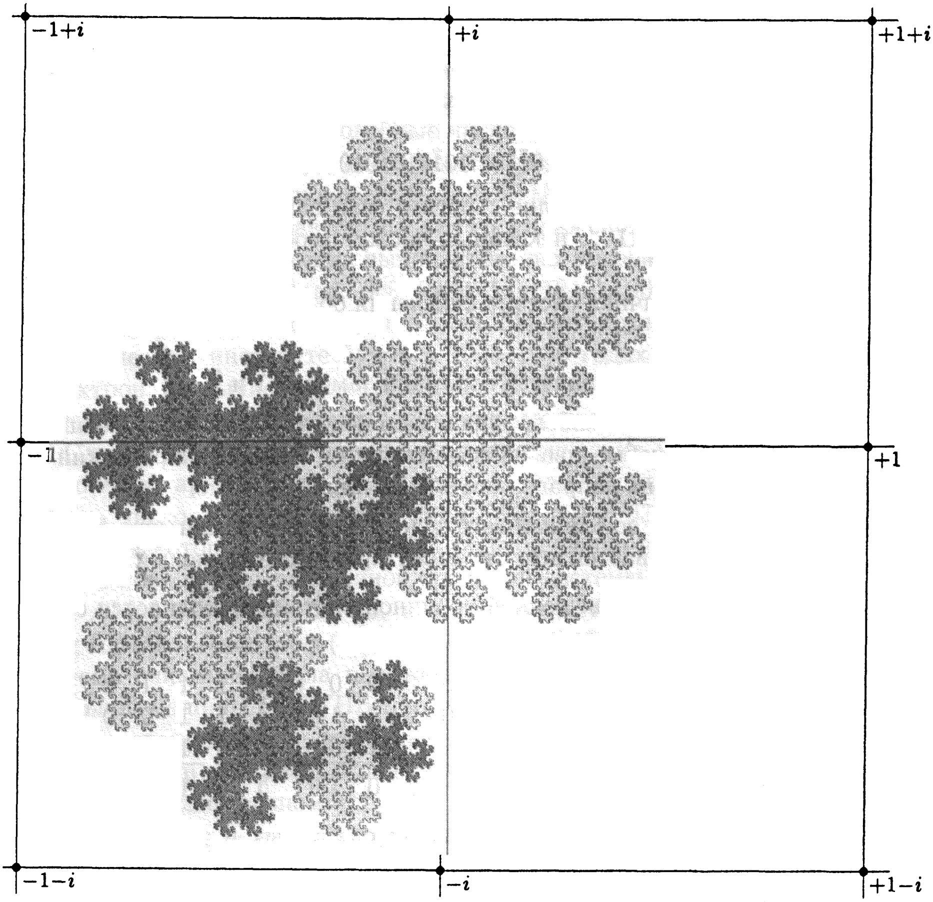

Рис. 1. Фрактальное множество S, называемое “двуглавый дракон”.

Уравновешенные троичные числа	Десятичные числа
$1 0 \bar{1}$	8
$1 1 \bar{1} 0.\bar{1} \bar{1}$	$32\frac{5}{9}$
$\bar{1} \bar{1} 1 0.1 1$	$-32\frac{5}{9}$
$\bar{1} \bar{1} 1 0$	-33
$0.1 1 1 1 1 \ldots$	$\frac{1}{2}$

Один из способов поиска числа в уравновешенной троичной системе состоит в следующем. Сначала запишем число в троичной системе счисления, к примеру

$$208.3 = (21201.022002200220\ldots)_3.$$

(Очень простой способ перевода в троичную систему, пригодный для вычисления вручную с карандашом и бумагой, описан в упр. 4.4.) Затем добавим к нему в троичной системе бесконечное число $\ldots 11111.11111\ldots$, после чего получим для вышеприведенного примера бесконечное число

$$(\ldots 11111210012.210121012101\ldots)_3.$$

Наконец, вычтем $\ldots 11111.11111\ldots$ поразрядно, уменьшая на единицу каждую цифру, и получим

$$208.3 = (10\bar{1}\bar{1}01.10\bar{1}010\bar{1}010\bar{1}0\ldots)_3. \tag{8}$$

Этот процесс можно сделать вполне строгим, если заменить искусственное бесконечное число $\ldots 11111.11111\ldots$ некоторым числом с соответствующим количеством единиц.

Уравновешенная троичная система счисления обладает многими привлекательными свойствами.

a) Отрицание числа осуществляется взаимной заменой 1 и $\bar{1}$.

b) Знак числа задается его наиболее значимым ненулевым тритом; в общем случае можно сравнивать любые два числа, используя лексикографический порядок при чтении слова слева направо, как в десятичной системе.

c) Операция округления до ближайшего целого идентична усечению; другими словами, просто отбрасывается все, что стоит правее разделяющей точки.

Операция сложения в уравновешенной троичной системе выполняется совсем просто, если воспользоваться таблицей сложения.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc}
\bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 \\
\hline
\bar{1}0 & \bar{1}1 & \bar{1} & \bar{1}1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1}1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\bar{1} & 1 & 1\bar{1} & 10
\end{array}$$

(Три входных трита — это триты двух наших слагаемых и трит переноса.) Вычитание состоит в формировании числа, противоположного по знаку вычитаемого, и последующем выполнении сложения. Умножение также сводится к операциям перемены знака и сложения, как в следующем примере.

$$\begin{array}{rl}
1\ \bar{1}\ 0\ \bar{1} & [17] \\
1\ \bar{1}\ 0\ \bar{1} & [17] \\
\hline
\bar{1}\ 1\ 0\ 1 & \\
\bar{1}\ 1\ 0\ 1\ 0\ & \\
1\ \bar{1}\ 0\ \bar{1}\ & \\
\hline
0\ 1\ 1\ \bar{1}\ \bar{1}\ 0\ 1 & [289]
\end{array}$$

Представление чисел в уравновешенной троичной системе неявно присутствует в одной знаменитой математической головоломке, обычно называемой "задача Баше (Bachet) о весах", хотя она была сформулирована еще Фибоначчи за четыре столетия до того, как Баше написал свою книгу, а перс Табари сделал это еще раньше — более чем за 100 лет до Фибоначчи. [См. W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* **1** (Leipzig: Teubner, 1910), Section 3.4; H. Hermelink, *Janus* **65** (1978), 105–117.]

Позиционные системы счисления с отрицательными цифрами были изобретены Дж. Колсоном (J. Colson) [*Philos. Trans.* **34** (1726), 161–173], затем забыты и вновь открыты примерно через 100 лет Джоном Лесли (Sir John Leslie) [*The Philosophy of Arithmetic* (Edinburgh, 1817); см. с. 33–34, 54, 64–65, 117, 150] и А. Коши (A. Cauchy) [*Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **11** (1840), 789–798]. Коши отмечал, что отрицательные цифры позволяют избежать необходимости помнить таблицу умножения после 5×5. Утверждение, что подобные числовые системы были давно известны в Индии [Я. Бхарати (J. Bharati), *Vedic Mathematics* (Delhi: Motilal Banarsidass, 1965)], было опровергнуто К. Ш. Шуклой (K. S. Shukla) [*Mathematical Education* **5**, 3 (1989), 129–133]. В "чистом" виде уравновешенная троичная система счисления появилась в статье изобретателя механических вычислительных устройств Леона Лаланна (Léon Lalanne) [*Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **11** (1840), 903–905]. Система оставалась незамеченной до тех пор, пока спустя 100 лет после публикации Лаланна в Электротехническом институте Мура в 1945–1946 годах не стали разрабатывать первые электронные вычислительные машины. В то время она наряду с двоичной системой серьезно рассматривалась в качестве возможной альтернативы десятичной системе. Сложность электронных схем арифметических устройств для уравновешенной троичной арифметики не намного выше, чем для двоичной системы, а чтобы задать число, в ней требуется лишь $\ln 2/\ln 3 \approx 63\%$ цифровых позиций от того количества, которое необходимо для представления чисел в двоичной системе. Дискуссии по поводу уравновешенной троичной системы счисления опубликованы в журнале *AMM* **57** (1950), 90–93, и в сборнике *High-speed Computing Devices*, Engineering Research Associates (McGraw-Hill, 1950), 287–289. Уравновешенная троичная система счисления была положена в основу экспериментальной советской вычислительной машины СЕТУНЬ (см. *CACM* **3** (1960), 149–150)*.

Возможно, симметричные свойства и простая арифметика этой системы счисления окажутся в один прекрасный день весьма существенными (когда "флип-флоп" заменится "флип-флэп-флопом")**.

Еще одно важное обобщение позиционного способа представления чисел — это позиционная система со *смешанным основанием*. Если дана последовательность чисел $\langle b_n \rangle$, где n могут быть отрицательными, то по определению полагается

$$\begin{bmatrix} \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0;\ a_{-1},\ a_{-2}, \ldots \\ \ldots, b_3,\ b_2,\ b_1,\ b_0;\ b_{-1},\ b_{-2}, \ldots \end{bmatrix} \\ = \cdots + a_3 b_2 b_1 b_0 + a_2 b_1 b_0 + a_1 b_0 + a_0 + a_{-1}/b_{-1} + a_{-2}/b_{-1}b_{-2} + \cdots. \qquad (9)$$

В простейших системах со смешанным основанием используются только целые числа; b_0, b_1, b_2, ... полагаются целыми числами, бóльшими единицы, и рассматриваются только такие числа, которые не содержат разделяющей точки, причем a_n должно принадлежать интервалу $0 \le a_n < b_n$.

Одна из наиболее важных систем со смешанным основанием — это *факториальная система счисления*, где $b_n = n+2$. С ее помощью можно единственным образом

* См. также Бруснецов Н. П. и др. *Малая цифровая вычислительная машина "Сетунь"*. — М., 1965. — *Прим. перев.*

** Здесь в оригинале — игра слов. Словосочетание "flip-flop" (дословно "щелчок-шлепок") означает в английской технической литературе элемент с двумя устойчивыми состояниями. По аналогии "flip-flap-flop" (дословно "щелчок-хлопок-шлепок") должно означать элемент с тремя устойчивыми состояниями. — *Прим. перев.*

представить любое неотрицательное целое число в виде

$$c_n\, n! + c_{n-1}\,(n-1)! + \cdots + c_2\, 2! + c_1, \tag{10}$$

где $0 \le c_k \le k$ для $1 \le k \le n$ и $c_n \ne 0$ (см. алгоритм 3.3.2).

Системы со смешанным основанием часто встречаются в нашей повседневной жизни; речь идет о единицах измерения. Например, величина "3 недели, 2 дня, 9 часов, 22 минуты, 57 секунд и 492 миллисекунды" может быть представлена в виде

$$\begin{bmatrix} 3, & 2, & 9, & 22, & 57; & 492 \\ & 7, & 24, & 60, & 60; & 1000 \end{bmatrix} \text{ секунд.}$$

Величина "10 фунтов, 6 шиллингов и три с половиной пенса" до перехода Великобритании к десятичной системе в денежных расчетах есть не что иное, как $\begin{bmatrix} 10, & 6, & 3; & 1 \\ & 20, & 12; & 2 \end{bmatrix}$ британских пенсов.

Числа со смешанным основанием можно складывать и вычитать, применяя очевидное обобщение обычных алгоритмов сложения и вычитания при условии, что для обоих операндов используется одна и та же система (см. упр. 4.3.1). Подобным образом можно легко умножать или делить числа со смешанным основанием на малые целые константы, используя простое расширение общеизвестных приемов счета карандашом на бумаге. В общем виде системы со смешанным основанием впервые были проанализированы Георгом Кантором (Georg Cantor) [*Zeitschrift für Math. und Physik* **14** (1869), 121–128]. Дополнительная информация о таких системах содержится в упр. 26 и 29.

У. Перри (W. Parry) исследовал некоторые вопросы, относящиеся к *иррациональным* основаниям (см. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **11** (1960), 401–416).

Помимо описанных здесь систем счисления, существует несколько других способов представления чисел, которые упоминаются в этой серии книг: биномиальная система счисления (упр. 1.2.6–56), система Фибоначчи (упр. 1.2.8–34, 5.4.2–10), ϕ-система (упр. 1.2.8–35), модульное представление (раздел 4.3.2), код Грея (раздел 7.2.1) и система с римскими цифрами (раздел 9.1).

УПРАЖНЕНИЯ

1. [*15*] Выразите числа $-10, -9, \ldots, 9, 10$ в системе счисления по основанию -2.

▶ **2.** [*24*] Рассмотрите следующие четыре системы счисления: (a) двоичную (прямой код), (b) негадвоичную (основание -2), (c) уравновешенную троичную и (d) систему по основанию $b = \frac{1}{10}$. Используйте эти четыре системы для представления каждого из трех чисел: (i) -49; (ii) $-3\frac{1}{7}$ (укажите период); (iii) π (несколько значащих цифр).

3. [*20*] Выразите $-49 + i$ в мнимочетверичной системе.

4. [*15*] Предположим, имеется MIX-программа, в ячейке памяти A которой находится число, разделяющая точка которого расположена между 3- и 4-м байтами, а в ячейке памяти B — число, разделяющая точка которого расположена между 2- и 3-м байтами. (Крайний слева байт имеет номер 1.) Где будет располагаться разделяющая точка в регистрах A и X после выполнения команд

(a) `LDA A; MUL B`   (b) `LDA A; SRAX 5; DIV B` ?

5. [*00*] Объясните, почему представление отрицательного целого числа в обратном коде всегда на единицу меньше представления в дополнительном коде, если рассматривать эти представления как положительные числа.

6. [*16*] Каковы наибольшее и наименьшее p — битовые целые числа, которые могут быть представлены в двоичной системе посредством (a) прямого кода, (b) обратного кода, (c) дополнительного кода?

7. [*M20*] В тексте раздела десятичное представление с дополнением до десяти определено только для целых чисел, записанных в одном машинном слове. Можно ли аналогично определить представление в этом же формате *для всех действительных чисел*, имеющих "бесконечную точность"? Существует ли подобный способ определения десятичного представления в обратном коде для всех действительных чисел?

8. [*M10*] Докажите соотношение (5).

▶ 9. [*15*] Переведите следующие *восьмеричные* числа в *шестнадцатеричные*, используя шестнадцатеричные цифры `0`, `1`, ..., `9`, `A`, `B`, `C`, `D`, `E`, `F`: *12*; *5655*; *2550276*; *76545336*; *3726755*.

10. [*M22*] Обобщите соотношение (5) для систем со смешанным основанием, как в соотношении (9).

11. [*22*] Разработайте алгоритм для вычисления суммы чисел $(a_n \ldots a_1a_0)_{-2}$ и $(b_n \ldots \ldots b_1b_0)_{-2}$, дающий результат в виде $(c_{n+2} \ldots c_1c_0)_{-2}$, с помощью системы счисления по основанию -2.

12. [*23*] Разработайте алгоритм перевода (a) числа, записанного в прямом двоичном коде $\pm(a_n \ldots a_0)_2$, в негадвоичное представление $(b_{n+1} \ldots b_0)_{-2}$ и (b) негадвоичного представления $(b_{n+1} \ldots b_0)_{-2}$ в прямой двоичный код $\pm(a_{n+1} \ldots a_0)_2$.

▶ 13. [*M21*] Существуют числа, имеющие два различных разложения в бесконечную десятичную дробь, например $2.3599999\ldots = 2.3600000\ldots$. Единственно ли представление чисел в *негадесятичной* (по основанию -10) системе счисления или существуют также вещественные числа по этому основанию с двумя различными бесконечными разложениями?

14. [*14*] Умножьте $(11321)_{2i}$ само на себя в мнимочетверичной системе, используя метод, описанный выше.

15. [*M24*] Как выглядят множества $S = \{\sum_{k\geq 1} a_k b^{-k} \mid a_k \text{ допустимая цифра}\}$, аналогичные множеству, представленному на рис. 1, в негадесятичной и мнимочетверичной системах счисления?

16. [*M24*] Постройте алгоритм сложения 1 с $(a_n \ldots a_1a_0)_{i-1}$ в системе счисления по основанию $i-1$.

17. [*M30*] Может показаться странным, что в качестве основания в системе счисления берется число $i-1$, а не аналогичное, но более простое число $i+1$. Всякое ли комплексное число $a+bi$ допускает "двоичное" представление в позиционной системе по основанию $i+1$?

18. [*HM32*] Покажите, что множество S, представленное на рис. 1, есть замкнутое множество, содержащее некоторую окрестность начала координат. (Следовательно, любое комплексное число допускает "двоичное" представление по основанию $i-1$.)

▶ 19. [*23*] (Дэвид У. Матула (David W. Matula).) Пусть D — множество целых чисел в системе с основанием b, для которых уравнение $x \equiv j$ (по модулю b) имеет точно одно решение при $0 \leq j < b$. Докажите, что все целые числа m (положительные, отрицательные и нуль) могут быть представлены в виде $m = (a_n \ldots a_0)_b$, где все a_j принадлежат множеству D, тогда и только тогда, когда все целые числа в интервале $l \leq m \leq u$ также представимы в этом виде, где $l = -\max\{a \mid a \in D\}/(b-1)$ и $u = -\min\{a \mid a \in D\}/(b-1)$. Например, $D = \{-1, 0, \ldots, b-2\}$ удовлетворяет данным условиям для всех $b \geq 3$. [*Указание*. Постройте алгоритм, формирующий подходящее представление.]

20. [*HM28*] (Дэвид У. Матула.) Рассмотрим десятичную систему счисления, в которой вместо $\{0, 1, \ldots, 9\}$ используются числа $D = \{-1, 0, 8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71\}$. Из результата

упр. 19 следует (как и из упр. 18), что все действительные числа могут быть представлены бесконечными десятичными дробями с помощью цифр из множества D.

В упр. 13 отмечалось, что некоторые числа в обычной десятичной системе имеют два представления. (a) Найдите действительное число, которое имеет *более* двух D — десятичных представлений. (b) Покажите, что ни одно действительное число не может иметь бесконечного множества D — десятичных представлений. (c) Покажите, что два или более D (десятичных представлений) имеют бесконечно много цифр.

▶ **21.** [*M22*] (К. Э. Шеннон (C. E. Shannon).) Может ли произвольное вещественное число (положительное, отрицательное или нуль) быть представлено в "уравновешенной десятичной" системе, т. е. в виде $\sum_{k\le n} a_k 10^k$ для некоторого целого числа n и некоторой последовательности a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., где любое a_k — это одно из десяти чисел $\{-4\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\}$? (Хотя нуль и не является одной из допустимых цифр, мы неявно полагаем, что a_{n+1}, a_{n+2}, ... — нули.) Найдите в этой системе счисления все представления нуля и все представления единицы.

22. [*HM25*] Пусть $\alpha = -\sum_{m\ge 1} 10^{-m^2}$. Докажите, что для заданного $\epsilon > 0$ и любого вещественного числа x существует такое "десятичное" представление этого числа, что $0 < |x - \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k| < \epsilon$, где каждое из чисел a_k может принимать только одно из трех значений: 0, 1 или α. (В этом представлении отрицательные степени 10 не используются.)

23. [*HM30*] Пусть множество D есть множество b вещественных чисел, таких, что любое положительное число имеет представление $\sum_{k\le n} a_k b^k$, где все $a_k \in D$. В упр. 20 показано, что существует много чисел, не имеющих *единственного* представления. Тем не менее докажите, что множество T всех таких чисел имеет меру нуль, если $0 \in D$. Покажите, что этот вывод не нуждается в доказательстве, если $0 \notin D$.

24. [*M35*] Найдите бесконечно много различных множеств D, которые состоят из десяти неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих следующим трем условиям: (i) $\gcd(D) = 1$; (ii) $0 \in D$; (iii) любое положительное вещественное число может быть представлено в виде $\sum_{k\le n} a_k 10^k$ для всех $a_k \in D$*.

25. [*M25*] (С. А. Кук (S. A. Cook).) Пусть b, u и v — целые положительные числа, причем $b \ge 2$ и $0 < v < b^m$. Покажите, что представление числа u/v в системе счисления по основанию b не содержит последовательности из m цифр, равных $b-1$, нигде справа от разделяющей точки. (Согласно общепринятому соглашению в стандартном представлении по основанию b не допускаются бесконечные последовательности цифр $(b-1)$.)

▶ **26.** [*HM30*] (Н. С. Мендельсон (N. S. Mendelsohn).) Пусть $\langle\beta_n\rangle$ — последовательность вещественных чисел, определенная для всех целых n, $-\infty < n < \infty$, таких, что

$$\beta_n < \beta_{n+1}; \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty; \qquad \lim_{n\to-\infty} \beta_n = 0.$$

Пусть $\langle c_n\rangle$ — произвольная последовательность положительных целых чисел, также определенная для всех целых n, $-\infty < n < \infty$. Скажем, что число x допускает "обобщенное представление", если существует такое целое n и такая последовательность целых чисел a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., что $x = \sum_{k\le n} a_k \beta_k$, где $a_n \ne 0$, $0 \le a_k \le c_k$ и $a_k < c_k$ для бесконечного множества k.

Покажите, что каждое положительное вещественное число x допускает ровно одно обобщенное представление тогда и только тогда, когда

$$\beta_{n+1} = \sum_{k\le n} c_k \beta k \qquad \text{для всех } n.$$

---

* Здесь и далее "gcd" обозначает "наибольший общий делитель" (greatest common divisor). — *Прим. перев.*

(Следовательно, системы со смешанным целочисленным основанием обладают этим свойством. Наиболее общими системами такого типа являются системы со смешанным основанием, у которых $\beta_1 = (c_0+1)\beta_0$, $\beta_2 = (c_1+1)(c_0+1)\beta_0$, ..., $\beta_{-1} = \beta_0/(c_{-1}+1)$, ...)

27. [*M21*] Покажите, что любое ненулевое число имеет единственное "знакопеременное двоичное представление"

$$2^{e_0} - 2^{e_1} + \cdots + (-1)^t 2^{e_t},$$

где $e_0 < e_1 < \cdots < e_t$.

▶ **28.** [*M24*] Покажите, что любое неотрицательное комплексное число вида $a + bi$, где a и b — целые числа, обладает единственным "периодическим двоичным представлением"

$$(1+i)^{e_0} + i(1+i)^{e_1} - (1+i)^{e_2} - i(1+i)^{e_3} + \cdots + i^t(1+i)^{e_t},$$

где $e_0 < e_1 < \cdots < e_t$ (ср. с упр. 27).

29. [*M35*] (Н. Г. де Брейн (N. G. de Bruijn).) Пусть S_0, S_1, S_2, ... — множества неотрицательных целых чисел; говорят, что совокупность $\{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$ обладает свойством B, если любое неотрицательное целое число n может быть единственным способом записано в виде

$$n = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots, \qquad s_j \in S_j.$$

(Свойство B означает, что $0 \in S_j$ для всех j, поскольку $n = 0$ может быть представлено только как $0+0+0+\cdots$.) Любая система счисления со смешанным основанием $b_0, b_1, b_2, \ldots$ дает пример совокупности множеств, удовлетворяющих свойству B, если положить $S_j = \{0, B_j, \ldots, (b_j - 1)B_j\}$, где $B_j = b_0 b_1 \ldots b_{j-1}$. В таком случае представление $n = s_0 + s_1 + s_2 + \cdots$ очевидным образом соответствует представлению (9) этого числа по смешанному основанию. Далее, если совокупность $\{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$ A_0, A_1, A_2, ... обладает свойством B, то, каково бы ни было разбиение A_0, A_1, A_2, ... неотрицательных целых чисел (т. е. $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, некоторые из множеств A_j могут быть пустыми), этим свойством обладает и полученная из нее путем "стягивания" совокупность $\{T_0, T_1, T_2, \ldots\}$, где множество T_j состоит из всех сумм вида $\sum_{i \in A_j} s_i$, взятых по всевозможным выборкам элементов $s_i \in S_i$.

Докажите, что *любая* последовательность $\{T_0, T_1, T_2, \ldots\}$, удовлетворяющая свойству B, может быть получена посредством "стягивания" некоторой совокупности $\{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$, соответствующей системе счисления по смешанному основанию.

30. [*M39*] (Н. Г. де Брейн.) Пример системы счисления по основанию -2 показывает, что любое целое число (положительное, отрицательное или нуль) имеет единственное представление в виде

$$(-2)^{e_1} + (-2)^{e_2} + \cdots + (-2)^{e_t}, \qquad e_1 > e_2 > \cdots > e_t \geq 0, \qquad t \geq 0.$$

Назначение данного упражнения — несколько обобщить это свойство.

a) Пусть последовательность целых чисел b_0, b_1, b_2, ... такова, что любое целое число n допускает единственное представление в виде

$$n = b_{e_1} + b_{e_2} + \cdots + b_{e_t}, \qquad e_1 > e_2 > \cdots > e_t \geq 0, \qquad t \geq 0.$$

(Данная последовательность $\langle b_n \rangle$ называется бинарным базисом.) Покажите, что найдется такое значение индекса j, что b_j нечетно, а для всех $k \neq j$ числа b_j четны.

b) Докажите, что бинарный базис $\langle b_n \rangle$ всегда может быть преобразован в последовательность вида d_0, $2d_1$, $4d_2$, ... $= \langle 2^n d_n \rangle$, где каждое из чисел d_k нечетно.

c) Докажите, что если каждое из чисел d_0, d_1, d_2, ... из п. (b) равно ± 1, то последовательность $\langle b_n \rangle$ образует бинарный базис тогда и только тогда, когда существует бесконечно много d_j, равных $+1$, и бесконечно много d_j, равных -1.

d) Докажите, что последовательность $7, -13 \cdot 2, 7 \cdot 2^2, -13 \cdot 2^3, \ldots, 7 \cdot 2^{2k}, -13 \cdot 2^{2k+1}, \ldots$ является бинарным базисом, и найдите представление числа $n = 1$.

▶ **31.** [*M35*] Одно обобщение представления чисел в обратном двоичном коде, известное как "2-адические числа", было предложено в работе K. Hensel, *Crelle* **127** (1904), 51–84. (В действительности К. Гензель предложил *p-адические числа* для любого простого числа p.) 2-адическое число можно рассматривать как двоичное число

$$u = (\ldots u_3 u_2 u_1 u_0 . u_{-1} \ldots u_{-n})_2,$$

представление которого бесконечно продолжается влево и лишь на конечное количество знаков вправо от разделяющей точки. Сложение, вычитание и умножение 2-адических чисел выполняются в соответствии с алгоритмом обычных арифметических операций, которые, в принципе, допускают возможность неограниченного продолжения влево. Например,

$$7 = (\ldots 000000000000111)_2 \qquad \tfrac{1}{7} = (\ldots 110110110110111)_2$$
$$-7 = (\ldots 111111111111001)_2 \qquad -\tfrac{1}{7} = (\ldots 001001001001001)_2$$
$$\tfrac{7}{4} = (\ldots 0000000000000001.11)_2 \qquad \tfrac{1}{10} = (\ldots 110011001100110.1)_2$$
$$\sqrt{-7} = (\ldots 100000010110101)_2 \quad \text{или} \quad (\ldots 011111101001011)_2.$$

Здесь число 7 — обычное число "семь" в двоичном представлении, а -7 — обратный код, неограниченно продолженный влево. Легко проверить, что обычная процедура сложения двоичных чисел дает $-7 + 7 = (\ldots 00000)_2 = 0$, если ее выполнение продолжать неограниченно долго. Значения $\frac{1}{7}$ и $-\frac{1}{7}$ представляют собой единственные 2-адические числа, которые после формального умножения на 7 дают соответственно 1 и -1. Значения $\frac{7}{4}$ и $\frac{1}{10}$ есть примеры 2-адических чисел, не являющихся 2-адическими "целыми", так как они имеют ненулевые биты справа от разделяющей точки. Приведенные два значения $\sqrt{-7}$, получающиеся одно из другого в результате перемены знака, являются единственными 2-адическими числами, которые после формального возведения в квадрат дают $(\ldots 111111111111001)_2$.

a) Докажите, что любое 2-адическое число u можно разделить на произвольное ненулевое 2-адическое число v, чтобы вычислить 2-адическое число w, удовлетворяющее равенству $u = vw$. (Следовательно, множество 2-адических чисел образует поле; см. раздел 4.6.1.)

b) Докажите, что 2-адическое представление рационального числа $-1/(2n+1)$, где n — положительное целое число, можно получить следующим образом. Сначала находим обычное двоичное разложение числа $+1/(2n+1)$, которое имеет вид периодической дроби $(0.\alpha\alpha\alpha\ldots)_2$ (α — некоторая строка из нулей и единиц). Тогда $(\ldots\alpha\alpha\alpha)_2$ будет 2-адическим представлением числа $-1/(2n+1)$.

c) Докажите, что 2-адическое представление числа u периодично (т. е. $u_{N+\lambda} = u_N$ для всех больших N при некотором $\lambda \geq 1$) тогда и только тогда, когда u рационально (т. е. $u = m/n$ для некоторых целых чисел m и n).

d) Докажите, что если n — целое число, то $\sqrt{n}$ является 2-адическим числом только в том случае, если для некоторого неотрицательного целого числа n оно удовлетворяет условию $n \bmod 2^{2k+3} = 2^{2k}$. (Таким образом, либо $n \bmod 8 = 1$, либо $n \bmod 32 = 4$, и т. д.)

32. [*M40*] (И. З. Руца (I. Z. Ruzsa).) Сформируйте бесконечно много целых чисел, в троичных представлениях которых используются только нули и единицы, а в четверичном представлении — только нули, единицы и двойки.

33. [*M40*] (Д. А. Кларнер (D. A. Klarner).) Пусть множество D — произвольное множество целых чисел, b — любое положительное целое число, а k_n — количество различных целых чисел, которые могут быть записаны как n-разрядные числа $(a_{n-1}\ldots a_1a_0)_b$ по основанию b с цифрами a_i в D. Докажите, что последовательность $\langle k_n\rangle$ удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению, и поясните, как вычислить производящую функцию $\sum_n k_n z^n$. Проиллюстрируйте разработанный алгоритм, показав, что в случае, когда $b=3$ и $D=\{-1,0,3\}$, число k_n есть число Фибоначчи.

▶ **34.** [*22*] (Г. В. Райтвайзнер (G. W. Reitwiesner), 1960.) Поясните, как представить заданное целое число n в виде $(\ldots a_2a_1a_0)_2$, где каждое из a_j есть -1, 0 либо 1, используя наименьшую ненулевую цифру.