Лекция 11: Раскраска графа

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Происхождение понятия раскраски графа

В приложениях теории графов нередко возникают задачи, для решения которых необходимо разбить множество всех вершин графа в объединение непустых непересекающихся подмножеств таким образом, чтобы вершины из одного и того же подмножества были попарно не смежными, а число таких подмножеств — минимально возможным. При решении таких задач, примеры которых будут приведены в лекции 13, можно представлять себе, что мы раскрашиваем вершины графа в различные цвета, причем сделать это надо так, чтобы любые две смежные вершины были раскрашены в разные цвета, а число использованных цветов было минимально возможным. Рассмотрению возникающих в этой связи вопросов и посвящены эта и две следующих лекции.

При рассмотрении раскрасок графов принято заменять названия красок натуральными числами («номерами» красок).

Определения

Пусть k — натуральное число. *Раскраской графа* $G = \langle V, E\rangle$ *в* k *цветов*, или просто k*-раскраской*, называется отображение f из множества V в множество $\{1, 2, \ldots, k\}$. Если при этом $f(v) = i$ для некоторой вершины $v \in V$, то будем говорить, что вершина v *раскрашена в* i*-й цвет*. Раскраска f графа называется *правильной*, если $f(u) \neq f(v)$ для любых двух смежных вершин u и v этого графа. Если существует правильная k-раскраска графа G, то G называют k-раскрашиваемым. Число k называется *хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi(G)$, если существует правильная k-раскраска графа G, но не существует его правильной $(k-1)$-раскраски. Правильная $\chi(G)$-раскраска графа G называется *оптимальной*.

Из определения следует, что наличие петель и кратность ребер никак не влияют на правильность раскрасок. Поэтому

- в этой и двух последующих лекциях рассматриваются *только обыкновенные графы*.

Лемма о 2-раскрашиваемых графах

Пусть G — обыкновенный граф. Тогда:

1) $\chi(G) = 1$ *тогда и только тогда, когда G — пустой граф.*
2) $\chi(G) = 2$ *тогда и только тогда, когда G — непустой двудольный граф.*

Доказательство. В пустом графе все раскраски — правильные, а в непустом смежные вершины нужно красить в разные цвета. Отсюда получаем 1). Докажем 2).

Необходимость. Пусть $\chi(G) = 2$. Зафиксировав правильную 2-раскраску f графа G, положим $X = \{v \in V(G) \mid f(v) = 1\}$, $Y = \{v \in V(G) \mid f(v) = 2\}$. Тогда G — двудольный граф с долями X и Y, непустой согласно 1).

Достаточность. Пусть G — непустой двудольный граф. Раскрасив все его нижние вершины одним цветом, а все верхние вершины другим, получим правильную 2-раскраску. Следовательно, $\chi(G) \leqslant 2$. Кроме того, $\chi(G) \neq 1$ в силу утверждения 1. □

Следствие из критерия двудольности графа (см. лекцию 7) и п.2) дают

Следствие 1

Если непустой граф G является деревом, то $\chi(G) = 2$. □

Лемма о раскраске циклов

Хроматическое число всякого цикла, содержащего n вершин, равно 2, если n четно, и 3, если n нечетно.

Доказательство. Циклы четной длины являются двудольными графами по критерию двудольности. Поэтому если n четно, то достаточно сослаться на лемму о 2-раскрашиваемых графах. Пусть теперь G — цикл нечетной длины $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{2k+1} \to v_1$. Граф G не двудолен по критерию двудольности, откуда $\chi(G) > 2$. Полагая $f(v_i) = 1$ для всех нечетных i, меньших $2k$, $f(v_i) = 2$ для всех четных i и $f(v_{2k+1}) = 3$, получаем правильную раскраску графа G в три цвета, откуда и следует требуемый результат. □

Так как правильная раскраска графа определяет правильную раскраску любого его подграфа, получаем

Следствие 2

Если граф G содержит цикл нечетной длины, то $\chi(G) > 2$. □

Лемма о раскраске полного графа

Хроматическое число графа K_n равно n.

Доказательство очевидно, поскольку правильными раскрасками полного графа являются в точности те раскраски, в которых все цвета различны. □

Из этой леммы непосредственно вытекает, аналогично следствию 2,

Следствие 3

Если граф G содержит подграф, изоморфный графу K_n, то $\chi(G) \geqslant n$. □

Разобранные частные случаи фактически исчерпывают все классы графов, для которых хроматическое число найти просто. В общем случае ситуация гораздо хуже, в частности,

- для любого эффективного (не переборного, см. лекцию 4) алгоритма построения правильной k-раскраски графа найдутся k-раскрашиваемые графы, для которых этот алгоритм такую раскраску найти не сможет.

Одна из причин столь печальной ситуации приведена на следующем слайде.

Замечание

В общем случае хроматическое число графа нельзя вычислить, зная только его стандартные числовые характеристики, такие, как число вершин, ребер, компонент связности, распределение степеней вершин (пример приведен ниже). Поэтому в дальнейшем речь пойдет об оценках, а не о точных значениях, хроматического числа.

Рассмотрим графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 1. Каждый из них имеет двенадцать вершин, в том числе четыре вершины степени 4 и восемь вершин степени 2, шестнадцать ребер, одну компоненту связности. Но, как легко понять, $\chi(G_1) = 4$, а $\chi(G_2) = 2$. 4-раскраска графа G_1 указана на рис. 1, а правильной раскраски G_1 в меньшее число цветов не существует, поскольку G_1 содержит в качестве подграфа граф K_4 (см. следствие 3). Так как граф G_2 — двудольный, имеем $\chi(G_2) = 2$.

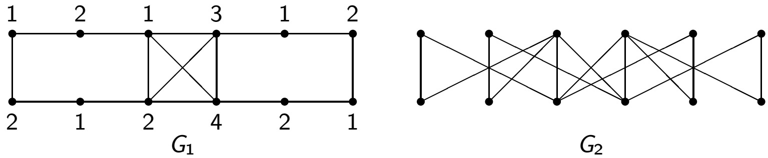


Рис. 1

- Под *нижними оценками* хроматического числа мы будем понимать неравенства вида $\chi(G) \geqslant c$, где c — некоторая константа, вычисляемая по графу G, а под *верхними оценками* — неравенства вида $\chi(G) \leqslant c$, где c имеет тот же смысл.

Определение

Максимальное число вершин, порождающих полный подграф в графе G, называется *плотностью* G и обозначается через $\omega(G)$.

Если $\omega(G) = n$, то в графе G есть подграф, изоморфный K_n. Ввиду следствия 3, верна

Первая нижняя оценка

Для произвольного графа G справедливо неравенство $\chi(G) \geqslant \omega(G)$. □

Существуют графы, для которых $\chi(G) = \omega(G)$. Это верно, например, для произвольного полного графа или для произвольного непустого двудольного графа. Но в общем случае разность $\chi(G) - \omega(G)$ может быть сколь угодно большой: для любого натурального n существует граф G такой, что $\chi(G) - \omega(G) = n$, см. теорему на следующем слайде.

Теорема о графах без треугольников

Для любого $k \geqslant 2$ существует обыкновенный связный граф G_k такой, что $\omega(G_k) = 2$ и $\chi(G_k) = k$.

Название теоремы обусловлено тем, что условие $\omega(G_k) = 2$ в точности означает, что в графе G_k нет подграфов K_3, т. е. треугольников.

Доказательство. Построим серию графов $\{G_k\}_{k \geqslant 2}$ по индукции. База индукции: положим $G_2 = K_2$. Шаг индукции: пусть граф G_k уже построен, $V(G_k) = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$. Определим G_{k+1} следующим образом:

$$
\begin{aligned}
V(G_{k+1}) &= V(G_k) \cup \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_s\} \cup \{v\}, \\
E(G_{k+1}) &= E(G_k) \cup \{(v'_i, v_j) \mid (v_i, v_j) \in E(G_k), i, j = 1, \ldots, s\} \\
&\qquad \cup \{(v, v'_i) \mid i = 1, \ldots, s\}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, G_k — вершинно-порожденный подграф в G_{k+1}. Вершины из $V(G_k)$ будем называть *оригиналами*, а вершины «со штрихами» — *копиями*. Графы G_3 и G_4 приведены на рис. 2 на следующем слайде (красным выделены подграфы G_2 и G_3 соответственно).

Равенства $\omega(G_k) = 2$ и $\chi(G_k) = k$ будем доказывать по индукции.

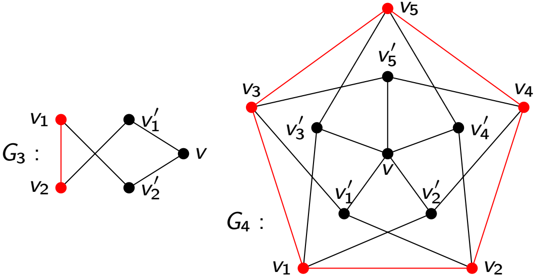


Рис. 2

Докажем, что $\omega(G_k) = 2$. База индукции ($k = 2$) очевидна, перейдем к шагу. Рассуждая от противного, предположим, что граф G_{k+1} содержит треугольник. По предположению индукции, в G_k треугольников нет, значит, данный треугольник содержит либо некоторую копию, либо вершину v. Две копии в треугольник входить не могут, так как они не смежны; значит, в треугольнике нет и вершины v, которая смежна только копиям. Единственный оставшийся случай — треугольник из копии и двух оригиналов: v_i', v_j и v_ℓ. Но тогда по определению $E(G_{k+1})$ в графе G_k есть ребра (v_i, v_j) и (v_i, v_ℓ), а значит, вершины v_i, v_j и v_ℓ образуют треугольник в G_k, противоречие.

Теперь докажем, что $\chi(G_k) = k$. База индукции ($k = 2$) очевидна. Для шага индукции надо показать, что граф G_{k+1} $(k+1)$-раскрашиваем, но не k-раскрашиваем. По предположению индукции, существует правильная k-раскраска f графа G_k. Дополним ее до раскраски графа G_{k+1}, положив $f(v_i') = f(v_i)$ для всех $i = 1, \ldots, s$, а также $f(v) = k + 1$. Новая раскраска правильна (вершина v_i' смежна с теми же вершинами, что и v_i, а цвет v_i отличен от цвета смежных вершин по предположению о правильности f), т. е. граф G_{k+1} является $(k+1)$-раскрашиваемым.

Рассуждая от противного, предположим, что существует правильная k-раскраска f графа G_{k+1}. Без ограничения общности, $f(v) = k$. Тогда копии раскрашены в цвета $1, \ldots, k-1$. Изменим раскраску оригиналов следующим образом: если $f(v_i) = k$, положим $f(v_i) = f(v_i')$. Заметим, что

- если вершина v_j смежна с v_i, то ее цвет отличен от цвета вершины v_i';
- из любых двух смежных вершин перекрашена не более чем одна.

Значит, новая функция f (не обязательно являющаяся правильной раскраской всего графа G_{k+1}) правильно раскрашивает граф G_k в цвета $1, \ldots, k-1$, противоречие с предположением индукции. □

Определение

Любое множество попарно несмежных вершин графа G называется *независимым*. Максимальное число вершин в независимом множестве называется *числом независимости* графа G и обозначается через $\beta(G)$.

Число независимости графа — это понятие, противоположное по смыслу понятию плотности графа. А именно, если G — обыкновенный граф, а $\overline{G}$ — его дополнение, то $\beta(G) = \omega(\overline{G})$.

Вторая нижняя оценка

Для произвольного графа G выполнено неравенство $\chi(G) \geqslant \frac{n(G)}{\beta(G)}$.

Доказательство. Положим $\chi(G) = k$, $\beta(G) = b$ и $n(G) = n$. Зафиксируем произвольную правильную k-раскраску графа G. Для всякого $i = 1, \ldots, k$ обозначим через V_i множество всех вершин графа G, раскрашенных в i-й цвет. По определению правильной раскраски графа каждое из множеств V_i независимо, и потому $|V_i| \leqslant b$ для всякого $i = 1, \ldots, k$. Следовательно,

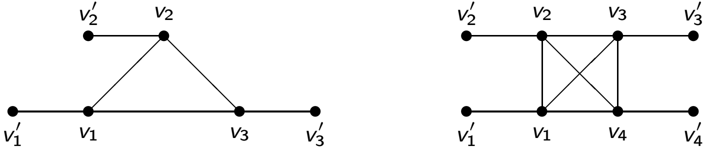
$$n = |V(G)| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leqslant kb, \text{ откуда } k \geqslant \frac{n}{b}. \qquad \square$$

Нетрудно видеть, что вторая нижняя оценка является хорошей, когда множество вершин графа можно разбить на независимые множества примерно одинакового размера. В качестве простых примеров таких графов упомянем K_n, в котором все независимые множества одноэлементны, и $K_{n,n}$, в котором доли являются независимыми множествами. Однако нетрудно сконструировать примеры, для которых эта оценка может быть сколь угодно плохой.

Рассмотрим граф K_n с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Определим граф K'_n следующим образом:

$$V(K'_n) = V(K_n) \cup \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\},$$
$$E(K'_n) = E(K_n) \cup \{(v_i, v'_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Графы K'_3 и K'_4 изображены на рис. 3.



K'_3 K'_4

Рис. 3

Граф K_n' содержит независимое множество $\{v_1', \ldots, v_n'\}$, а любой набор из $n+1$ вершины этого графа содержит либо вершины v_i, v_j для некоторых $i \neq j$, либо вершины v_i, v_i' для некоторого i, и потому не является независимым. Следовательно, $\beta(K_n') = n$. Поскольку $n(K_n') = 2n$, вторая нижняя оценка дает число $\frac{n(K_n')}{\beta(K_n')} = \frac{2n}{n} = 2$ независимо от n.

В то же время, легко понять, что $\chi(K_n') = n$. Действительно, в K_n' есть подграф K_n, откуда $\chi(K_n') \geqslant n$; а любую правильную n-раскраску f графа K_n легко продолжить до правильной n-раскраски K_n', раскрасив каждую из вершин v_i' в любой цвет, кроме цвета $f(v_i)$.

Построенные выше примеры показывают, что и первая, и вторая нижние оценки могут быть очень плохими в том смысле, что оценка может быть равна 2, а хроматическое число при этом быть сколь угодно большим. На самом деле, более корректный подход к оценке качества оценок должен учитывать число вершин в графе. «Сколь угодно большое» число может быть очень маленьким по сравнению с размером графа. Поскольку $\chi(G) \leqslant n(G)$, «большими» хроматическими числами естественно считать числа, сравнимые с числом вершин в графе.

- Серия примеров для второй нижней оценки имеет действительно большое хроматическое число, равное половине числа вершин в графе; таким образом, есть повод утверждать, что эта оценка может быть очень плоха.
- Серия примеров для первой нижней оценки имеет весьма маленькое хроматическое число, примерно равное двоичному логарифму от числа вершин в графе; тем самым, повода утверждать, что эта оценка очень плоха, нет.

Главным недостатком и первой, и второй нижних оценок является не их неточность, а то, что для их применения надо найти либо плотность данного графа, либо его число независимости, а задача вычисления этих характеристик графа в общем случае не менее сложна, чем исходная задача нахождения его хроматического числа.

Существуют нижние оценки хроматического числа графа, использующие только легко вычисляемые его характеристики. Приведем без доказательства одну из них.

Третья нижняя оценка

Если G — обыкновенный граф, $n = n(G)$ и $m = m(G)$, то $\chi(G) \geqslant \frac{n^2}{n^2-2m}$. □

Легко понять, что в полном графе (а значит, и в любом обыкновенном графе) удвоенное число ребер меньше квадрата числа вершин, и потому число, стоящее в знаменателе в правой части неравенства, всегда положительно.