Лекция 9: Плоские и планарные графы

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Происхождение понятий плоского и планарного графа

Все задачи о графах, рассмотренные нами в предыдущих лекциях, и почти все те, что будут рассмотрены в дальнейшем, — это задачи на алгебраическое понятие графа. Однако в теории графов встречаются и геометрические задачи, в которых ответом является граф как геометрическая фигура (или, если смотреть на это с другой стороны, геометрическое «изображение» графа, заданного алгебраически). Самой известной из таких задач посвящены эта и следующая лекции. Заметим, что ее решение опирается и на геометрические (в том числе, стереометрические) аргументы.

При прокладке различных коммуникаций может требоваться, чтобы их линии не пересекались (вспомните головоломку о домах и колодцах). Аналогичная проблема существует в электротехнике при проектировании и изготовлении печатных плат. Если представлять точки, соединяемые коммуникациями, как вершины графа, а сами коммуникации — как его ребра, то возникает задача: найти такое изображение этого графа на плоскости, при котором ребра не пересекаются, или установить, что такого изображения не существует. Для формализации этой задачи в теории графов вводятся понятия плоского и планарного графа.

В определении графа как геометрической фигуры (лекция 1) не было никаких ограничений на расположение этой фигуры в пространстве. Мы будем говорить, что граф *изображен на поверхности* (плоскости, сфере, и т. п.), если все его вершины и ребра принадлежат этой поверхности.

Определение

Граф, изображенный на плоскости, называется *плоским*, если его ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин графа.

Отметим, что свойство графа быть или не быть плоским — это свойство геометрического изображения, а не алгебраического объекта. Знания матрицы смежности графа может не хватить для проверки этого свойства.

Замечание

Свойство «быть плоским» может не сохраняться при переходе к изоморфному графу. Например, графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 1, изоморфны. Но граф G_1 является плоским, а граф G_2 — нет.

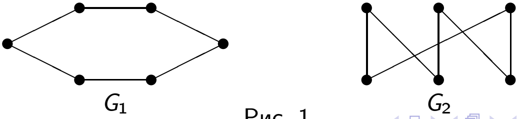

Рис. 1

Как мы уже выяснили, термин «плоский граф» всегда относится к конкретному (одному из многих) геометрическому изображению графа, и один и тот же граф (как множество вершин + множество ребер) может иметь как плоские, так и не плоские изображения. В то же время, принципиальный вопрос, на который нужно отвечать при решении задач типа прокладки коммуникаций, это

- имеет ли данный граф хотя бы одно плоское изображение?

Определим класс графов, для которых ответ на этот вопрос положителен.

Определение

Граф называется *планарным*, если он изоморфен плоскому графу.

Граф G_2 на рис. 1 является планарным, но (как уже отмечалось) не плоским. Еще один пример приведен на следующем слайде.

Планарный граф (пример)

На рис. 2 слева приведена матрица смежности некоторого графа G. Этот граф является планарным — на рис. 2 справа приведено его плоское изображение. Заметим, что понятия плоский / не плоский к самому графу G неприменимы.

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

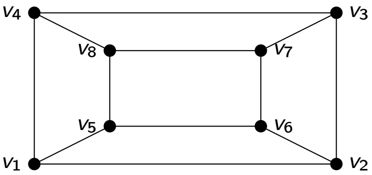

Рис. 2

Понятия плоского и планарного графа являются частными случаями следующих более общих понятий.

Определение

Пусть σ — произвольная поверхность в трехмерном пространстве. Граф G, изображенный на поверхности σ, называется *уложенным на* σ, если его ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин. Граф G *укладывается на поверхности* σ, если он изоморфен некоторому графу, уложенному на σ.

Свойство графа укладываться на поверхности безусловно зависит от вида этой поверхности. Однако многие поверхности с точки зрения укладки графов ничем не отличаются от плоскости. Принципиально важен следующий случай.

Теорема об укладке графа на сфере

Граф укладывается на сфере тогда и только тогда, когда он планарен.

Доказательство. Необходимость. Пусть граф G уложен на сфере; построим его изоморфизм на плоский граф. Для этого выберем на сфере точку N, не принадлежащую G, а в диаметрально противоположной к точке N точке S проведем к сфере касательную плоскость π (см. рис. 3). Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через N не параллельно π. Эта прямая не является касательной к сфере, поскольку касательные плоскости к сфере в точках N и S параллельны. Значит, такая прямая имеет ровно одну общую точку со сферой, отличную от N, и ровно одну общую точку с плоскостью. Определим функцию φ, которая переводит любую точку X сферы, не совпадающую с N, в точку Y плоскости π, лежащую на прямой NX.

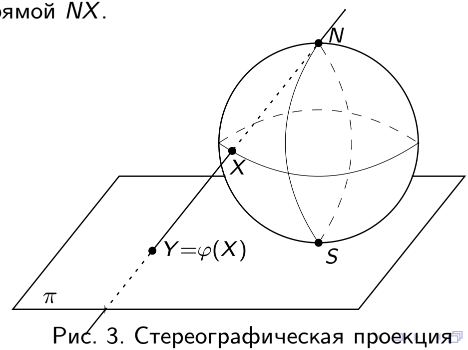

Рис. 3. Стереографическая проекция

Функция φ называется *стереографической проекцией сферы на плоскость* π *из точки* N.

Очевидно, что φ — биекция (разные точки сферы переходят в разные точки плоскости, а для любой точки $Y \in \pi$ можно найти ее прообраз, проведя прямую YN). Кроме того, функция φ непрерывна (стандартными средствами математического анализа легко показать, что близкие точки на сфере переходят в близкие точки на плоскости), а значит, образом отрезка непрерывной линии на сфере является отрезок непрерывной линии на плоскости.

Из непрерывности φ следует, что геометрическая фигура $\varphi(G)$, т. е. образ графа G при функции φ, сама является графом, см. рис. 4 на следующем слайде (вершины и ребра $\varphi(G)$ являются образами вершин и ребер G).

Граф $\varphi(G)$ изображен на плоскости (рис. 4). Проверим, что он плоский. Пусть точка Y принадлежит двум ребрам $\varphi(G)$. Тогда точка $X = \varphi^{-1}(Y)$ принадлежит двум соответствующим ребрам графа G, т. е. по условию является вершиной в G. Но тогда $Y = \varphi(X)$ — вершина в $\varphi(G)$, что и требовалось. Осталось заметить, что функция φ, рассматриваемая только на множестве вершин графа G, является изоморфизмом G на $\varphi(G)$. Тем самым, мы доказали, что граф G — планарен. Значит, планарен и любой граф, изоморфный G. Необходимость доказана.

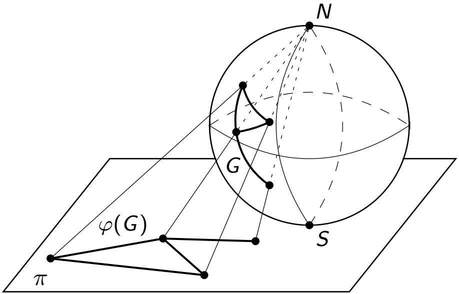

Рис. 4

Достаточность легко доказывается с помощью той же самой биекции φ (точнее, с помощью биекции φ^{-1}). Меняется только начало построения: на плоскость, содержащую заданный граф, произвольным образом «ставим» сферу, после чего за N берем точку сферы, противоположную точке касания с плоскостью. $\square$

После доказательства теоремы об укладке графа на сфере возникает естественный вопрос: существуют ли вообще поверхности, укладка на которых не равносильна планарности? Ответ — да, существуют. Примером такой поверхности является трехмерный тор, который часто называют «бубликом» (см. рис. 5). За счет наличия «дырки» такой бублик обладает дополнительными возможностями по размещению ребер. На рис. 5 показано, как на торе уложить двудольный граф $K_{3,3}$, возникающий в задаче о домах и колодцах (невидимые линии проведены пунктиром). На следующей лекции мы строго докажем, что этот граф не планарен.

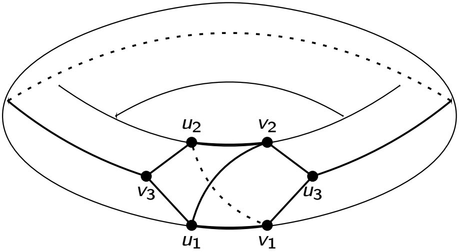

Рис. 5. Граф $K_{3,3}$ на торе

Задачи об укладке графов тесно связаны со следующей красивой стереометрической теоремой Эйлера. Напомним, что многогранник называется *выпуклым*, если при проведении плоскости через любую его грань все точки многогранника окажутся с одной стороны этой плоскости (т. е. в одном полупространстве).

Теорема Эйлера о многогранниках

Если выпуклый многогранник имеет n вершин, m ребер и r граней, то $n - m + r = 2$.

Мы докажем эту теорему на следующей лекции, переведя ее на язык теории графов (на самом деле, будет доказано даже более общее утверждение).

Любой многогранник можно считать графом (если «забыть» о гранях и рассматривать только вершины и ребра, то получается геометрическое изображение некоторого графа в пространстве). Очевидно, что такой граф является обыкновенным и связным. Все выпуклые многогранники обладают еще одним сильным графовым свойством, см. следующий слайд.

Лемма о выпуклом многограннике

Любой выпуклый многогранник, рассматриваемый как граф, планарен.

Доказательство. Выберем внутри выпуклого многогранника M произвольную точку C и возьмем сферу σ с центром C такую, что многогранник полностью находится внутри сферы. Спроектируем M на σ; для этого рассмотрим все лучи с началом в точке C. Каждый луч пересекает M в единственной точке (в силу выпуклости) и σ — тоже в единственной точке. Каждая точка сферы будет *проекцией* точки многогранника, находящейся на том же луче. Тем самым мы задали биекцию многогранника M на сферу σ. Эта биекция переводит граф, составленный из вершин и ребер M, в изоморфный ему граф, уложенный на сфере. По теореме об укладке графа на сфере этот граф планарен. $\square$

Замечание

На рис. 2 в начале этой лекции слева приведена матрица смежности куба, а справа — изоморфный кубу плоский граф.

Для того, чтобы перевести теорему Эйлера о многогранниках на язык теории графов, нужно найти аналог понятия грани.

Определение

Гранью плоского графа называется максимальная область плоскости, любые две точки которой можно соединить непрерывной линией, не пересекающей граф (точки графа не принадлежат никакой грани). Число граней плоского графа G обозначается через $g(G)$.

Замечание

Любой плоский граф содержит ровно одну неограниченную грань (иными словами, грань бесконечной площади). Эта грань называется *внешней*.

Граф G, изображенный на рис. 6, имеет четыре грани — F_1, F_2, F_3 и F_4. Грань F_4 является внешней.

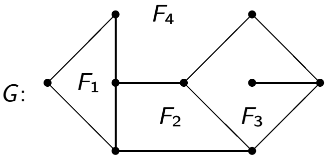

Рис. 6. Грани плоского графа

Определение

Границей грани F плоского графа G называется подграф графа G, состоящий в точности из всех вершин и ребер, «прилегающих» к F (в терминах математического анализа — содержащих только предельные точки грани F).

Границами граней F_1, F_2, F_3 и F_4 графа G, изображенного на рис. 6, являются, соответственно, графы G_1, G_2, G_3 и G_4, изображенные на рис. 7.

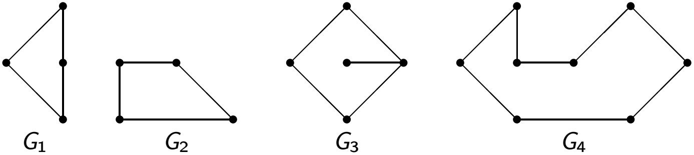

Рис. 7. Границы граней

Поскольку граница любой не внешней грани плоского графа имеет конечную площадь, она должна быть ограничена некоторой замкнутой кривой. Отсюда следует

Замечание

Граница любой не внешней грани плоского графа содержит цикл. □

Итак, на следующей лекции мы докажем сформулированную ниже теорему, из которой, в частности, следует теорема Эйлера о многогранниках.

Теорема Эйлера о плоских графах

Если обыкновенный связный плоский граф имеет n вершин, m ребер и r граней, то $n - m + r = 2$.

Название «теорема Эйлера о многогранниках» часто относят и к этой теореме, но мы используем разные названия, чтобы не вносить путаницу.

Замечание

Равенство $n - m + r = 2$ из формулировки теоремы называется *тождеством Эйлера*.