# Лекция 7: Двудольные графы

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

## Определение

Граф $G = \langle V, E \rangle$ называется *двудольным*, если существуют множества его вершин $X$ и $Y$ такие, что $X, Y \neq \varnothing$, $X \cup Y = V$, $X \cap Y = \varnothing$, и всякое ребро графа $G$ инцидентно некоторой вершине из $X$ и некоторой вершине из $Y$. Множества $X$ и $Y$ называются *долями* графа $G$.

Пример двудольного графа изображен на рис. 1. Обычно, как это и сделано на рис. 1, мы будем изображать вершины из множества $X$ на одном уровне снизу (и называть *нижними*), а вершины из множества $Y$ — на одном уровне сверху (и называть *верхними*). Два последних термина носят условный характер: верхние и нижние вершины всегда можно «поменять местами».

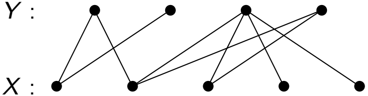


Рис. 1. Двудольный граф

Отметим, что граф из задачи о домах и колодцах и графы из задачи о деревенских свадьбах являются двудольными.

Следующее утверждение впервые было отмечено, по-видимому, венгерским математиком Д. Кёнигом.

**Теорема (критерий двудольности)**

*Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он содержит более одной вершины и все его циклы имеют четную длину.*

*Доказательство. Необходимость.* Всякий двудольный граф $G$ содержит более одной вершины, так как множества $X$ и $Y$ непусты. Возьмем произвольный цикл в $G$, выйдем из его начальной вершины и будем двигаться по ребрам цикла до тех пор, пока не пройдем весь цикл. Поскольку таким образом мы вернемся в начальную вершину, при этом мы одинаковое число раз перейдем из верхней вершины в нижнюю и из нижней вершины в верхнюю. Следовательно, число ребер в цикле четно.

*Достаточность.* Пусть $G$ — граф, содержащий более одной вершины, в котором все циклы имеют четную длину. Очевидно, что если все компоненты связности графа $G$, содержащие более одной вершины, являются двудольными графами, то и весь граф $G$ двудолен. Поэтому далее можно считать, что граф $G$ связен и содержит более одной вершины.

Зафиксируем в $G$ произвольную вершину $u$ и рассмотрим произвольные смежные вершины $v$ и $w$. Ввиду связности графа $G$ расстояния $\rho(u, v)$ и $\rho(u, w)$ определены. Докажем, что $\delta = |\rho(u, v) - \rho(u, w)| = 1$. Очевидно, $\delta \leqslant 1$, поскольку к любому $(u, v)$-маршруту можно добавить ребро $(v, w)$, получая $(u, w)$-маршрут на единицу большей длины, и наоборот, добавив это ребро к $(u, w)$-маршруту, получим $(u, v)$-маршрут на единицу большей длины. Таким образом, осталось показать, что $\delta \neq 0$. Пусть $\delta = 0$, $\rho(u, v) = \rho(u, w) = k$. Рассмотрим кратчайшую $(u, v)$-цепь и кратчайшую $(u, w)$-цепь. Поскольку первые вершины этих цепей совпадают, а последние — различаются, в $G$ имеется подграф, изображенный на рис. 2. Этот подграф содержит цикл

$$v_i \to v_{i+1} \to \cdots \to v_k = v \to w = v'_k \to \cdots \to v'_{i+1} \to v_i$$

нечетной длины $2(k - i) + 1$, что противоречит условию. Итак, $\delta = 1$, т. е. среди чисел $\rho(u, v)$, $\rho(u, w)$ одно четное и одно нечетное.

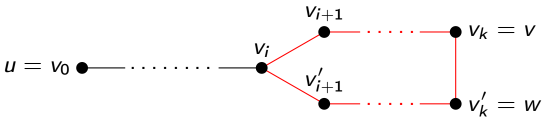


Рис. 2

Положим

$$X = \{v \in V(G) \mid \rho(u, v) - \text{нечетное}\}, \quad Y = \{v \in V(G) \mid \rho(u, v) - \text{четное}\}.$$

Очевидно, что $X \cap Y = \varnothing$ и $X \cup Y = V(G)$. Далее, вершина $u$ принадлежит $Y$, а все смежные с $u$ вершины принадлежат $X$, т. е. $X, Y \neq \varnothing$.

Наконец, как мы показали выше, расстояния от $u$ до любых двух смежных вершин графа $G$ имеют разную четность, т. е. одна из этих вершин лежит в $X$, а другая — в $Y$. Следовательно, граф $G$ по определению двудольный. □

Приведенный критерий показывает, что класс двудольных графов включает в себя все неодноэлементные деревья.

**Следствие**

*Всякое дерево, содержащее более одной вершины, является двудольным графом.* □

**Определение**

*Паросочетанием* в графе $G$ называется подграф $P$ графа $G$, в котором все вершины имеют степень 1.

- Часто паросочетанием называют не подграф, а множество его ребер, т. е. множество ребер, попарно не имеющих общих вершин.
- Паросочетания существуют в любом непустом графе: подграф из двух смежных вершин и ребра между ними является паросочетанием.
- Чаще всего паросочетания рассматриваются для двудольных графов; мы будем рассматривать только двудольные графы.

На рис. 3 приведен двудольный граф и одно из паросочетаний в нем (выделено красным).

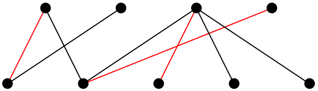

Рис. 3. Пример паросочетания в двудольном графе

### Определение

Паросочетание $P$ в графе $G$ называется *максимальным*, если в $G$ нет паросочетаний, число ребер в которых больше, чем в $P$. Вершина $v$ графа $G$ называется *насыщенной* в паросочетании $P$, если в $P$ существует ребро, инцидентное $v$, и *свободной* в паросочетании $P$, если в $P$ нет таких ребер. Паросочетание $P$ называется *совершенным*, если все вершины графа $G$ насыщены в $P$.

Очевидно, что всякое совершенное паросочетание максимально. Обратное неверно. Так, в графе, изображенном на рис. 3, ребра, выделенные цветом, образуют паросочетание, которое, очевидно, не является совершенным, но, как можно доказать несложным перебором, максимально.

## Задача о назначениях

Дан двудольный граф, требуется построить максимальное паросочетание.

К такой графовой постановке сводятся самые разные задачи. Приведем несколько примеров (моделирование задачи графом везде аналогично первому примеру).

- *Задача о деревенских свадьбах* (лекция 1); вершины — девушки ($X$) и юноши ($Y$), ребра — знакомства, ребра из паросочетания — свадьбы.
- *Назначение на должность*: имеются вакантные должности и претенденты на них, о каждом претенденте известно какие должности он может занять, требуется заполнить максимум вакансий (совместительство не допускается).
- *Распараллеливание работ*: имеются станки и детали, о каждой детали известно, на каких станках ее можно обрабатывать, требуется распределить детали между станками так, чтобы одновременно обработать их как можно больше.
- *Выбор представителей*: в парламенте есть несколько комиссий, член парламента может заседать в нескольких комиссиях; нужно выбрать председателя каждой комиссии (совмещать председательство в двух комиссиях нельзя).

Чтобы решить задачу о существовании в графе совершенного паросочетания, нам потребуется следующее понятие.

**Определение**

Пусть дан граф $G$, $v$ — его произвольная вершина. *Окрестностью вершины* $v$ называется множество $O(v)$ всех смежных ей в $G$ вершин. Если $M$ — произвольное множество вершин в $G$, то *окрестностью множества* $M$ называется множество $O(M)$ всех вершин, смежных в $G$ хотя бы с одной вершиной из $M$.

Заметим, что если в двудольном графе $M \subseteq X$, то $O(M) \subseteq Y$, и наоборот. Например, если в графе, изображенном на рис. 4, положить $M = \{x_4, x_5\}$, то $O(M) = \{y_3\}$, а если в том же графе положить $M = \{x_2, x_5\}$, то $O(M) = \{y_1, y_3, y_4\}$.

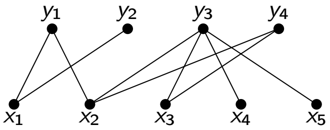


Рис. 4

Задачу о существовании совершенного паросочетания решает так называемая теорема о свадьбах (хотя ее автор, Ф.Холл, на самом деле решал не задачу о свадьбах, а эквивалентную ей задачу о выборе представителя).

**Теорема Холла о свадьбах**

*Пусть $G$ — двудольный граф с долями $X$ и $Y$. Совершенное паросочетание в $G$ существует тогда и только тогда, когда $|X| = |Y|$ и*

$$|O(M)| \geqslant |M| \text{ для всякого } M \subseteq X. \tag{1}$$

Тем же методом, которым мы докажем эту теорему, можно получить и более общий результат (для случая, когда количество юношей и девушек не совпадает).

**Обобщенная теорема о свадьбах**

*Пусть $G$ — двудольный граф с долями $X$ и $Y$. Паросочетание, насыщающее все вершины из $X$, в $G$ существует тогда и только тогда, когда $|O(M)| \geqslant |M|$ для всякого $M \subseteq X$.* □

*Доказательство. Необходимость.* Совершенное паросочетание $P$ в графе $G$ можно расматривать как функцию, отображающую каждую вершину из $X$ в смежную ей вершину из $Y$. По определению совершенного паросочетания эта функция является биекцией, откуда $|X| = |Y|$. Более того, $P$ отображает каждое подмножество $M \subseteq X$ в некоторое подмножество $Y_M$, содержащее $|M|$ элементов, являющихся смежными к вершинам из $M$ вершинами. Но тогда $Y_M \subseteq O(M)$ и $|M| = |Y_M| \leqslant |O(M)|$, что и требовалось.

*Достаточность.* Пусть $G$ — двудольный граф, для которого $|X| = |Y| = n$ и выполнено условие (1). Докажем, что в $G$ существует паросочетание $P$, содержащее $n$ ребер (такое паросочетание очевидно является совершенным). Доказательство проведем индукцией по $n$. В случае $n = 1$ (*база индукции*), единственная вершина из $X$ и единственная вершина из $Y$ должны быть соединены ребром, чтобы условие (1) выполнялось. Но тогда можно взять $P = G$.

Перейдем к *шагу индукции*: предположим, что для двудольных графов с меньшим чем $n$ числом вершин в каждой доле утверждение теоремы верно. Рассмотрим два случая.

Случай 1: *для произвольного непустого собственного подмножества $M$ в $X$ выполнено строгое неравенство $|O(M)| > |M|$.*

Выберем произвольную вершину $x \in X$ и произвольную смежную ей вершину $y \in Y$ (вершина $y$ существует, так как $|O(x)| \geqslant 1$ согласно (1)). Положим $X' = X \setminus \{x\}$, $Y' = Y \setminus \{y\}$ и $G' = G - \{x, y\}$. Множества $X'$ и $Y'$ непусты, так как $n > 1$. Очевидно, что $G'$ — двудольный граф с долями $X'$ и $Y'$, причем $|X'| = |Y'| = n - 1 < n$.

Граф $G'$ удовлетворяет условию теоремы. Действительно, окрестность любого множества $M \subseteq X'$ состоит из тех же элементов, что и окрестность того же множества в графе $G$, за исключением, быть может, элемента $y$ в случае непустого $M$. Но окрестность непустого множества $M$ в $G$ содержала строго больше элементов, чем само $M$, а значит, окрестность $M$ в $G'$ содержит не меньше $|M|$ элементов.

По предположению индукции, в $G'$ можно выбрать паросочетание, содержащее $n - 1$ ребер. Добавив к ним ребро $(x, y)$, получим паросочетание в графе $G$, содержащее $n$ ребер, что и требовалось.

Случай 2: *существует непустое собственное подмножество $X'$ в $X$ такое, что $|O(X')| = |X'|$.*

Пусть $|X'| = k$. Положим $Y' = O(X')$, $X'' = X \setminus X'$ и $Y'' = Y \setminus Y'$. Тогда $|Y'| = k$, $|X''| = |Y''| = n - k > 0$.

Для произвольного подмножества $M \subseteq X'$ выполнено условие $O(M) \subseteq Y'$. Отсюда следует, что подграф $G'$ графа $G$, порожденный множеством вершин $X' \cup Y'$, удовлетворяет всем условиям теоремы. Так как $k < n$, по предположению индукции в $G'$ есть паросочетание $P'$ с $k$ ребрами.

Пусть теперь $M$ — произвольное подмножество в $X''$, $s = |M|$. По условию, $|O(M \cup X')| \geqslant |M \cup X'| = s + k$. Таким образом, окрестность множества $M \cup X'$ содержит не менее $s$ вершин из множества $Y''$. Эти вершины смежны вершинам из $M$, поскольку $O(X') = Y'$. Значит, у множества $M$ есть не менее $|M|$ смежных вершин во множестве $Y''$. Но тогда подграф $G''$ графа $G$, порожденный множеством вершин $X'' \cup Y''$, удовлетворяет всем условиям теоремы. Так как $n - k > 0$, по предположению индукции в $G''$ есть паросочетание $P''$ с $n - k$ ребрами.

Положив $P = P' \cup P''$, мы получим требуемое паросочетание. Шаг индукции доказан. $\square$

На рис. 5 воспроизведен граф $G$ и паросочетание в нем с рис. 3. Совершенного паросочетания в этом графе, очевидно, нет, поскольку $|Y| < |X|$. Существует ли в $G$ паросочетание, насыщающее все вершины из $Y$? Тоже нет, поскольку $O(\{y_1, y_2, y_4\}) = \{x_1, x_2\}$. Следовательно, приведенное на рисунке паросочетание с тремя ребрами является максимальным.

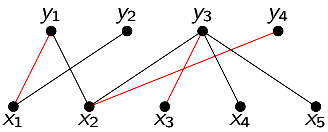


Рис. 5