Лекция 5: Двусвязность

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Ребро графа называется *мостом*, если после удаления этого ребра из графа число компонент связности графа увеличивается. Вершина графа называется *точкой сочленения*, если после удаления из графа этой вершины число компонент связности графа увеличивается.

Граф G, изображенный на рис. 1, имеет четыре моста (ребра e_1, e_2, e_3 и e_4) и две точки сочленения (вершины u и v).

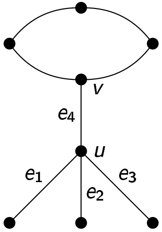


Рис. 1

- Понятия моста и точки сочленения обычно рассматривают для связных графов.

Критерий для свойства «быть мостом»

Теорема о мостах

Ребро e графа G является мостом тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном цикле графа G.

Доказательство. Необходимость. Пусть ребро e является мостом графа G. Если e принадлежит некоторому циклу, то по теореме о разрыве цикла удаление e из G не увеличивает числа компонент связности графа G. Следовательно, e не может содержаться ни в одном из циклов.

Достаточность. Допустим, что ребро e не содержится ни в одном из циклов графа G и инцидентно вершинам u и v. Тогда u и v связаны, а значит, лежат в одной и той же компоненте связности графа G. Обозначим эту компоненту связности через G_1. Если в графе $G - e$ есть (u, v)-цепь, то, добавив к этой цепи ребро e, получим цикл графа G, содержащий ребро e, что невозможно по условию. Следовательно, вершины u и v находятся в разных компонентах связности графа $G - e$. Таким образом, в результате удаления ребра e из графа G компонента связности G_1 этого графа распалась как минимум на две компоненты связности. Следовательно, $c(G - e) > c(G)$, и ребро e является мостом по определению. □

Лемма об удалении моста

Пусть e — мост графа G. Тогда граф $G - e$ имеет ровно на одну компоненту связности больше, чем граф G.

Доказательство. Пусть G_e — компонента связности графа G, содержащая ребро e, а u и v — вершины, которым e инцидентно. Все компоненты связности графа G, отличные от G_e, переходят в граф $G - e$ без изменения. Поэтому достаточно показать, что граф $G_e - e$ содержит ровно две компоненты связности (одной компоненты быть не может по определению моста). Докажем, что больше двух компонент тоже не может быть, а именно, любая вершина w из G_e связана в графе $G_e - e$ либо с u, либо с v. Поскольку вершины v и w принадлежат одной и той же компоненте связности G_e графа G, в силу леммы о существовании простой цепи в G существует простая (w, v)-цепь. Если эта цепь не содержит ребра e, то все ребра этой цепи принадлежат графу $G - e$. Но тогда вершины w и v связаны в графе $G - e$. Пусть теперь простая цепь из w в v содержит ребро e. Поскольку e не может входить в эту (w, v)-цепь дважды и инцидентно вершине v, оно является последним в рассматриваемой цепи. Удалив e из этой цепи, мы получим (w, u)-цепь. Таким образом, в этом случае связанными в $G_e - e$ оказываются вершины w и u.

Теорема о точке сочленения

Вершина v является точкой сочленения связного графа G тогда и только тогда, когда в G найдутся две отличные от v вершины w_1 и w_2 такие, что любая (w_1, w_2)-цепь проходит через v.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — связный граф, а v — точка сочленения графа G. По определению точки сочленения граф $G - v$ не является связным. Пусть w_1 и w_2 — вершины из разных компонент связности графа $G - v$. Если в G существует (w_1, w_2)-цепь, которая не проходит через вершину v, то все ребра этой цепи принадлежат графу $G - v$. Это означает, что в графе $G - v$ вершины w_1 и w_2 связаны некоторой цепью, что противоречит выбору этих вершин. Следовательно, любая цепь из w_1 в w_2 проходит через v.

Достаточность. Предположим, что в графе G найдутся вершины w_1 и w_2 такие, что любая (w_1, w_2)-цепь проходит через v. В графе $G - v$ вершины w_1 и w_2 не будут связанными. Следовательно, $c(G - v) > c(G) = 1$, т. е. v — точка сочленения графа G. □

1. В отличие от ситуации с удалением из графа моста, при удалении из графа точки сочленения число компонент связности может вырасти как угодно сильно. Более точно, для произвольного натурального n существуют граф G и точка сочленения v в нем такие, что $c(G - v) - c(G) = n$. Примером, подтверждающим это, является граф с множеством вершин $v_0, v_1, \ldots, v_{n+1}$ и множеством ребер (v_0, v_1), (v_0, v_2), $\ldots$, v_{n+1} (см. рис. 2): он имеет одну компоненту связности, а после удаления из него вершины v_0, являющейся точкой сочленения, получается граф, число компонент связности которого равно $n + 1$.

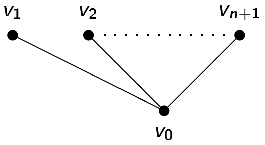


Рис. 2

2. Единственный связный граф, имеющий мост, но не имеющий точки сочленения, — это цепь длины 1 (т. е. вершины u, v и ребро (u, v)). Во всех остальных случаях хотя бы одна из инцидентных мосту вершин является точкой сочленения.

Определение

Связный граф без точек сочленения называется *двусвязным*.

Преположим, что граф моделирует сеть связи: вершины и ребра — это, соответственно, узлы и линии связи. Связность графа в таком случае означает возможность позвонить либо послать сообщение из любого узла в любой. Двусвязные графы моделируют «отказоустойчивые» сети связи:

- выход из строя одного узла не нарушает функционирования остальной сети, независимо от того, какой узел вышел из строя;
- выход из строя одной линии не нарушает функционирования остальной сети, независимо от того, какая линия вышла из строя (см. комментарий 2 на предыдущем слайде; единственное исключение из этого правила — цепь длины 1).

При изучении сетей связи рассматривают и более сильные требования отказоустойчивости:

- выход из строя любых k узлов не нарушает функционирования остальной сети ($(k+1)$-связные графы);
- выход из строя любых k линий не нарушает функционирования остальной сети (реберно $(k+1)$-связные графы).

Определение

Двусвязный подграф G' графа G называется *компонентой двусвязности* графа G, если он максимален в том смысле, что никакой другой двусвязный подграф G'' графа G не содержит G'.

На рис. 3 изображен граф с пятью компонентами двусвязности (обведены красным).

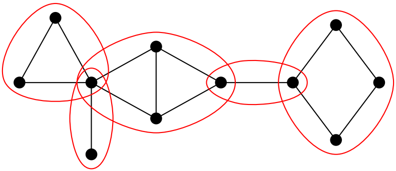


Рис. 3. Компоненты двусвязности графа

Отметим, что компоненты двусвязности, в отличие от компонент связности, могут иметь общие вершины.

Свойство 1

Компонента двусвязности графа является вершинно-порожденным подграфом.

Доказательство. Если компонента двусвязности G' графа G содержит не все ребра графа G, соединяющие вершины из $V(G')$, то недостающие ребра можно добавить, получая двусвязный подграф G'' графа G, содержащий G'. Но тогда G' по определению не является компонентой двусвязности, противоречие. Значит, G' содержит все ребра графа G, соединяющие вершины из $V(G')$, т. е. подграф G' — вершинно-порожденный по определению. □

Свойство 2

Две различные компоненты двусвязности графа либо не имеют общих вершин, либо имеют единственную общую вершину, являющуюся точкой сочленения графа.

(Доказательство приведено на следующем слайде.)

Доказательство. Пусть компоненты двусвязности G' и G'' графа G имеют общую вершину v. Рассмотрим граф $\overline{G}$, состоящий в точности из всех вершин и ребер графов G' и G'' (см. рис. 4). Граф $\overline{G}$ связен, но не двусвязен по определению компоненты двусвязности. Значит, в нем есть точка сочленения, и ей может быть только вершина v. (Если удалить любую другую вершину из G', то G' останется связным, т. е. для любой оставшейся в G' вершины u найдется (u, v)-цепь, а значит, и (u, w)-цепь для любой вершины w графа G''. Тем самым, граф $\overline{G}$ останется связным. При удалении вершины из G'' рассуждаем аналогично.)

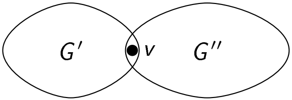
$\overline{G}$:


Рис. 4

Поскольку v — точка сочленения, подграфы G' и G'' не могут иметь других общих вершин: если такая вершина v' есть, то граф $\overline{G} - v$ связен, поскольку любая его вершина связана цепью с v' в силу двусвязности графов G' и G''. □

Лемма

Любой гамильтонов граф двусвязен.

Доказательство. Если граф G не двусвязен, то в нем есть точка сочленения v и, по теореме о точке сочленения, вершины w_1 и w_2, отличные от v и такие, что любая (w_1, w_2)-цепь проходит через v (см. рис. 5). Но тогда любой цикл в G, проходящий через w_1 и w_2, проходит через вершину v как минимум дважды. Значит, цикла, проходящего по всем вершинам по одному разу, в графе G не существует. □

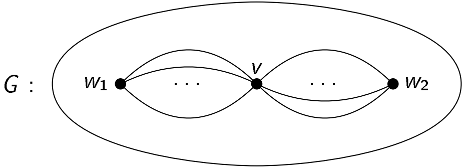


Рис. 5

Идею, использованную в доказательстве данной леммы, можно использовать для получения более сильного необходимого условия гамильтоновости.

Определение

Набор вершин $\{v_1, \ldots, v_k\}$ связного графа G называется *обобщенной точкой сочленения k-го порядка*, если граф $G - \{v_1, \ldots, v_k\}$ имеет более k компонент связности.

В графе G на рис. 6 есть точка сочленения второго порядка — это пара вершин $\{u, v\}$. Действительно, граф $G - \{u, v\}$ имеет три компоненты связности, обведенные на рисунке красным.

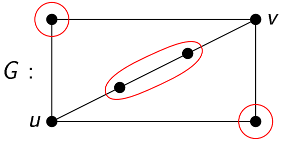


Рис. 6

Замечание

Как легко видеть из определений, обобщенная точка сочленения первого порядка — это «обычная» точка сочленения связного графа.

Следующая теорема обобщает доказанную ранее лемму и используется для доказательства негамильтоновости графа.

Теорема (необходимое условие гамильтоновости)

Любой гамильтонов граф не имеет обобщенных точек сочленения.

Например, граф, изображенный на предыдущем слайде, не гамильтонов.

Доказательство теоремы. Пусть граф G имеет обобщенную точку сочленения $\{v_1, \ldots, v_k\}$, а граф $G - \{v_1, \ldots, v_k\}$ — компоненты связности $G_1, G_2, \ldots, G_{k+1}$ (компонент связности может быть и больше, но для дальнейшего рассуждения это неважно). Тогда граф G можно схематично представить так, как на рис. 7 (см. следующий слайд).

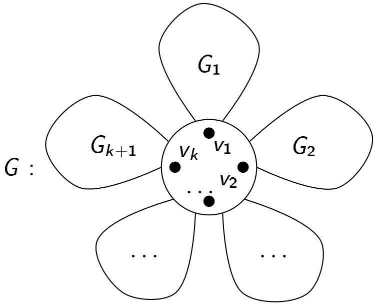


Рис. 7

Рассмотрим какой-нибудь цикл C, содержащий все вершины графа G. Обходя данный цикл, мы должны, для каждого $i = 1, \dots, k+1$, хотя бы раз зайти в подграф G_i (т. е. в i-й «лепесток» графа на рис. 7) и хотя бы раз из него выйти. Таким образом, цикл C содержит хотя бы $k+1$ цепь, соединяющую вершины из разных «лепестков». Но любая цепь между вершинами из разных «лепестков» проходит через какую-то из вершин $v_1, \dots, v_k$. Значит, какая-то из этих k вершин встречается по крайней мере в двух из упомянутых цепей, т. е. дважды встречается в цикле C, что означает, что C — не гамильтонов цикл.