Лекция 3: Маршруты и связность

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Определение

Маршрутом в графе называется последовательность ребер этого графа $e_1, e_2, \ldots, e_k$ $(k \geqslant 1)$, для которой существует последовательность вершин $v_0, v_1, \ldots, v_k$ такая, что для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ ребро e_i инцидентно вершинам v_{i-1} и v_i. При этом

- если $v_0 = v_k$, то маршрут называется *циклическим*;
- если $v_0 = u$, $v_k = v$, то маршрут называется (u, v)-*маршрутом*;
- для любой вершины u графа определен *тривиальный* маршрут, состоящий из одной этой вершины ($k = 0$, т. е. ребер нет, и $v_0 = u$);
- если все ребра $e_1, e_2, \ldots, e_k$ различны, то маршрут называется *цепью*, а циклический маршрут — *циклом*;
- если все вершины $v_0, v_1, \ldots, v_k$ различны (кроме, быть может, равенства $v_0 = v_k$), то цепь называется *простой цепью*, а цикл — *простым циклом*;
- если (u, v)-маршрут является цепью (простой цепью), то он называется (u, v)-*цепью* (соответственно, *простой* (u, v)-*цепью*).

В графе, изображенном на рис. 1, рассмотрим следующие последовательности ребер:

- e_3, e_7, e_6, e_1, e_2, e_1, e_3, e_4, e_6, e_{10} — маршрут (но не циклический маршрут и не цепь);
- e_8, e_{12}, e_{13}, e_{11}, e_8, e_4, e_6, e_7 — циклический маршрут (но не цикл);
- e_3, e_7, e_9, e_5, e_6, e_{10} — цепь (но не цикл и не простая цепь);
- e_3, e_7, e_9, e_{12} — простую цепь (но не простой цикл);
- e_5, e_{12}, e_{13}, e_{11}, e_8, e_7, e_6 — цикл (но не простой цикл);
- e_3, e_7, e_6, e_2 — простой цикл.

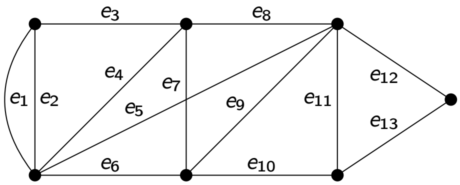


Рис. 1

В определении маршрута говорится о последовательности ребер, а не вершин, так как если маршрут проходит через кратные ребра, то последовательность вершин не определяет его однозначно (непонятно, по какому из ребер, составляющих кратное ребро, надо двигаться). То же самое относится к определениям цепи и цикла. Но если граф не содержит кратных ребер, то маршруты, цепи и циклы можно задавать и как последовательность вершин. Именно так мы, как правило, и будем делать в дальнейшем.

Например, в графе, изображенном на рис. 2, последовательность вершин v_4, v_2, v_3, v_5, v_4 задает цикл.

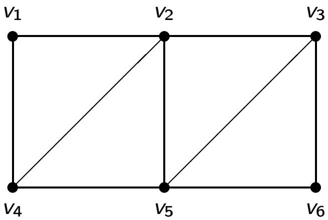


Рис. 2

1. Мы часто будем записывать цикл, соединяя соседние (в этом цикле) вершины стрелками, идущими слева направо. Так, указанный на предыдущем слайде цикл может быть записан в виде

$$v_4 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_4. \tag{1}$$

Мы будем считать циклы, проходящие через одни и те же вершины в одном и том же порядке, но начинающиеся в разных вершинах, одним и тем же циклом. Так, например, цикл (**??**) считается совпадающим с циклами $v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_2$ и $v_5 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_5$.

2. Из определения изоморфизма следует, что при изоморфизме каждый маршрут $e_1, \dots, e_k$, проходящий по вершинам $v_0, \dots, v_k$, переходит в некоторый маршрут $e'_1, \dots, e'_k$, проходящий по вершинам $v'_0, \dots, v'_k$, причем $e_i = e_j$ тогда и только тогда, когда $e'_i = e'_j$, и $v_i = v_j$ тогда и только тогда, когда $v'_i = v'_j$. В частности,

- если в графе G имеется r штук циклов из k ребер, то в изоморфном ему графе также r штук циклов из k ребер.

3. Иногда цепь (или цикл) удобно считать графом, состоящим из всех вершин и ребер, составляющих эту цепь (цикл).

Лемма о существовании простой цепи

Лемма

Пусть u и v — различные вершины графа G. Следующие условия эквивалентны:

а) *существует маршрут из u в v;*

б) *существует цепь из u в v;*

в) *существует простая цепь из u в v.*

Доказательство. Импликации в)$\Rightarrow$б)$\Rightarrow$а) очевидны, т. е. достаточно доказать, что а)$\Rightarrow$в). Рассмотрим произвольный (u, v)-маршрут $e_1, \ldots, e_k$, проходящий через вершины $v_0 = u, v_1, \ldots, v_k = v$. Заметим, что

- если $v_i = v_j$ для некоторых $i < j$, то последовательность $e_1, \ldots, e_i, e_{j+1}, \ldots, e_k$ по определению является (u, v)-маршрутом, проходящим через вершины $v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_k$.

Если исходный (u, v)-маршрут не является простой цепью, выберем пару индексов (i, j), не совпадающую с $(0, k)$, такую, что $i < j$ и $v_i = v_j$. По сделанному замечанию, существует (u, v)-маршрут $e_1, \ldots, e_i, e_{j+1}, \ldots, e_k$, содержащий меньше ребер, чем исходный. Если новый маршрут является простой цепью, то все доказано, если же нет, выберем новую пару (i, j) и снова «укоротим» маршрут. Поскольку число ребер в исходном маршруте конечно, через конечное число шагов получим простую цепь. $\square$

Определение

Вершины u и v графа G *связаны*, если в G существует (u, v)-маршрут. Граф, в котором любые две вершины связаны, называется *связным*.

Другими словами, связный граф — это граф, в котором из любой вершины можно «пройти» в любую другую его вершину, «двигаясь» по ребрам графа. Отметим, что любая вершина связана сама с собой тривиальным маршрутом.

Определение

Связный подграф G' графа G называется *компонентой связности* графа G, если он *максимален* в том смысле, что никакой другой связный подграф G'' графа G не содержит подграфа G'. Число компонент связности графа G обозначается через $c(G)$.

Тем самым, компонента связности графа G — это такой набор вершин и всех инцидентных им в G ребер, что:

(i) если v и w — различные вершины из этого набора, то из v в w можно пройти, двигаясь по ребрам графа;

(ii) если вершина v входит в этот набор, а вершина w не входит в него, то из v в w нельзя пройти, двигаясь по ребрам графа.

Компоненты связности: пример и замечания

Граф G, изображенный на рис. 3, имеет три компоненты связности. Одна из них состоит из вершины v, а две другие — это изображенные на том же рисунке графы G_1 и G_2.

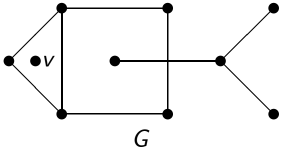


Рис. 3

Оба пункта следующего замечания вытекают непосредственно из определений.

Замечание

- Всякая компонента связности графа G является порожденным подграфом в G.
- Если $G_1, \ldots, G_r$ — все компоненты связности графа G, то любой изоморфный G граф также имеет r компонент связности, и эти компоненты изоморфны $G_1, \ldots, G_r$.

Понятию компоненты связности графа можно дать и другое (разумеется, эквивалентное указанному выше) определение, использующее понятие *отношения эквивалентности*.

На множестве всех вершин графа G введем бинарное отношение α правилом: если $u, v \in V(G)$, то $u \,\alpha\, v$ тогда и только тогда, когда вершины u и v связаны. Легко понять, что отношение α:

- рефлексивно, так как любая вершина связана сама с собой тривиальным маршрутом;
- симметрично, так как если последовательность $e_1, \ldots, e_k$ является (u, v)-маршрутом, то последовательность $e_k, \ldots, e_1$ есть (v, u)-маршрут;
- транзитивно, так как «склеив» (u, v)-маршрут $e_1, \ldots, e_k$ с (v, w)-маршрутом $e'_1, \ldots, e'_\ell$, получим (u, w)-маршрут $e_1, \ldots, e_k, e'_1, \ldots, e'_\ell$.

Такм образом, α является отношением эквивалентности. Следовательно, отношение α задает разбиение множества вершин графа G на классы.

Определение

Подграф графа G, порожденный всеми вершинами некоторого α-класса, называется *компонентой связности* графа G.

Теорема о разрыве цикла

Если из графа G удалить ребро, входящее в какой-нибудь цикл, то число компонент связности графа не изменится. В частности, если граф G был связным, то и полученный граф будет связным.

Доказательство. Пусть ребро e графа G входит в некоторый цикл; так как цикл — частный случай цепи, по лемме о существовании простой цепи e входит и в простой цикл, скажем, $e, e'_1, \ldots, e'_\ell$. Возьмем произвольные вершины u и v графа G. Достаточно доказать, что если u и v связаны в G, то они связаны и в графе $G - e$. Итак, пусть u и v связаны в G. По лемме о существовании простой цепи, в G найдется (u, v)-цепь, скажем, $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Если в этой цепи нет ребра e, то вершины u и v связаны в графе $G - e$ этой же цепью. Если же $e = e_i$, где $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, то в графе $G - e$ существует (u, v)-маршрут $e_1, \ldots, e_{i-1}, e'_1, \ldots, e'_\ell, e_{i+1}, \ldots, e_k$, см. рис. 4. Значит, u и v связаны в $G - e$. $\square$

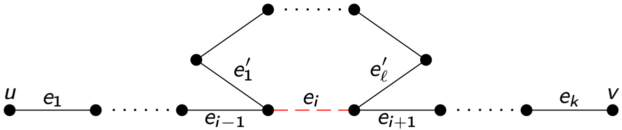


Рис. 4

Определение

Длиной маршрута называется число входящих в него ребер. *Расстоянием между вершинами u и v* графа G называется минимум из длин (u, v)-маршрутов в этом графе. Если вершины u и v не связаны, то расстояние между u и v считается равным бесконечности. Расстояние между вершинами u и v обозначается через $\rho(u, v)$.

Замечание

Так как тривиальный маршрут имеет длину 0, $\rho(u, u) = 0$ для любой вершины u. Далее, для любых вершин графа очевидно выполнены условия $\rho(u, v) = \rho(v, u)$ и $\rho(u, v) + \rho(v, w) \leqslant \rho(u, w)$ (*неравенство треугольника*).

Определение

Пусть G — связный граф. *Диаметром графа G* называется максимум из расстояний между вершинами этого графа. Диаметр графа G обозначается через $d(G)$. Если v — вершина графа, то через $r(v)$ обозначается максимум из расстояний от v до других вершин графа. *Радиусом графа G* называется минимальное из чисел $r(v)$, где v пробегает множество $V(G)$. Радиус графа G обозначается через $r(G)$. Любая вершина w, для которой $r(w) = r(G)$, называется *центром графа*.

Приведем пример, показывающий, как задача нахождения центров графа может возникать в приложениях теории графов. Предположим, что граф представляет собой сеть дорог, т. е. его вершинами являются населенные пункты, а ребрами — дороги между ними. Требуется оптимально разместить больницы, магазины и другие пункты обслуживания. Одним из естественных критериев оптимальности является минимизация расстояний от пунктов обслуживания до наиболее удаленных от них населенных пунктов. Но расстояние от вершины v до наиболее удаленной от нее вершины есть не что иное, как $r(v)$. Таким образом, пункты обслуживания надо размещать в тех вершинах v, у которых величина $r(v)$ минимальна, т. е. в центрах графа.

В графе может быть более одного центра. Рассмотрим графы G_1, G_2 и G_3, изображенные на рис. 5. В графе G_1 центрами являются все вершины, в графе G_2 — только вершина v, в графе G_3 — вершины v_1, v_2 и только они. У графа G_1 диаметр и радиус равны 1, у графа G_2 диаметр равен 2, а радиус — 1, у графа G_3 диаметр равен 3, а радиус — 2. Проверку всех этих фактов мы оставляем читателю.

- Заметим, что во всех трех случаях радиус графа не больше его диаметра и не меньше половины диаметра.

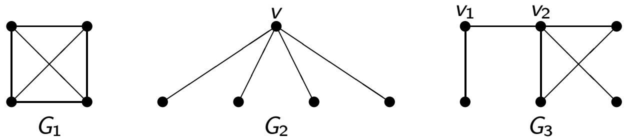


Рис. 5

Теорема о радиусе и диаметре

Если G — связный граф, то выполнены неравенства $\frac{d(G)}{2} \leqslant r(G) \leqslant d(G)$.

Доказательство. Неравенство $r(G) \leqslant d(G)$ следует прямо из определений:

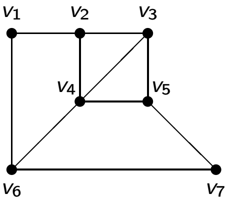
$$r(G) = \min_{v \in V(G)} r(v) \leqslant \max_{v \in V(G)} r(v) = \max_{v \in V(G)} \max_{u \in V(G)} \rho(u, v) = d(G).$$

По определению диаметра, для доказательства неравенства $r \geqslant \frac{d(G)}{2}$ достаточно показать, что расстояние между произвольными вершинами u и v графа G не превосходит $2r$. Пусть w — произвольный центр графа. Тогда из определения центра и неравенства треугольника получаем

$$\rho(u, v) \leqslant \rho(u, w) + \rho(w, v) \leqslant r + r = 2r,$$

что и требовалось. □

Найдем диаметр, радиус и центры графа, изображенного на рис. 6 слева.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	$r(v_i)$
v_1	0	1	2	2	3	1	2	3
v_2	1	0	1	1	2	2	3	3
v_3	2	1	0	1	1	2	2	2
v_4	2	1	1	0	1	1	2	2
v_5	3	2	1	1	0	2	1	3
v_6	1	2	2	1	2	0	1	2
v_7	2	3	2	2	1	1	0	3

Рис. 6

Для этого составим таблицу расстояний между вершинами графа (см. рис. 6, справа). В этой таблице на пересечении i-й строки и j-го столбца (где $1 \leqslant i, j \leqslant 7$) указано расстояние между вершинами v_i и v_j, а в последнем столбце указаны величины $r(v_i)$ для $i = 1, 2, \ldots, 7$.
Ясно, что диаметр графа равен максимуму из чисел в последнем столбце, а радиус — минимуму из них. Таким образом, диаметр данного графа равен 3, радиус — 2, а центрами являются вершины v_3, v_4 и v_6.