Лекция 12: Верхние оценки хроматического числа

Б.М.Верников, А.М.Шур

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

Алгоритм последовательной раскраски

В предыдущей лекции мы привели ряд нижних оценок хроматического числа. Эта лекция посвящена верхним оценкам. Первая из них основана на следующем простом алгоритме.

Алгоритм последовательной раскраски графа

Вход: граф G. *Выход*: правильная раскраска f графа G.

Вершины красятся по очереди. Для каждой вершины v составляется список красок, уже использованных для раскраски смежных с v вершин, после чего v красят краской с наименьшим номером среди всех красок, отсутствующих в списке.

Полученная раскраска f всегда правильна, но не всегда оптимальна даже для совсем простых графов. Она существенно зависит от того, в каком порядке мы будем выбирать вершины. На рис. 1 и 2 раскрашивается один и тот же граф при разном порядке выбора вершин. При этом на рис. 1 получился оптимальный результат (2 краски), а на рис. 2 — нет.

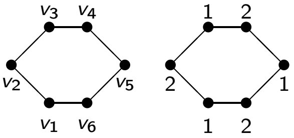


Рис. 1

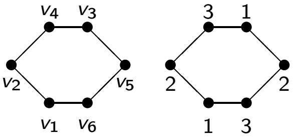


Рис. 2

Обозначим через $\Delta(G)$ максимум из степеней вершин графа. Из алгоритма последовательной раскраски легко вытекает следующая

Верхняя оценка хроматического числа произвольного графа

Если G — произвольный граф, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Доказательство. Будем раскрашивать граф в соответствии с алгоритмом последовательной раскраски. Поскольку для любой вершины v число раскрашенных смежных ей вершин не превосходит $\Delta(G)$, сама вершина v заведомо будет раскрашена краской с номером не большим $\Delta(G) + 1$. $\square$

Оказывается, что если наложить на граф G некоторые совсем не обременительные ограничения, то верхняя оценка хроматического числа, указанная на предыдущем слайде, может быть несколько улучшена.

Теорема Брукса

Если G — связный неполный граф и $\Delta(G) \geqslant 3$, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

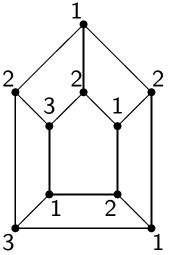
Требование связности графа G не ограничивает возможностей применения этой теоремы. Очевидно, что если правильно раскрасить каждую компоненту связности графа G, то получится правильная раскраска всего графа. Следовательно, справедливо

Замечание о компонентах связности

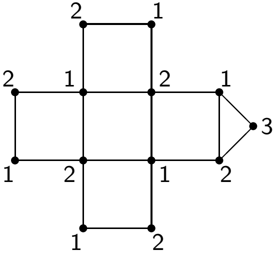
Хроматическое число графа равно максимуму из хроматических чисел его компонент связности. $\square$

Требования, чтобы граф был неполным и выполнялось неравенство $\Delta(G) \geqslant 3$, также необременительны: хроматическое число любого полного графа известно (см. лемму о раскраске полного графа в лекции 11), а если G — связный граф и $\Delta(G) \leqslant 2$, то G попадает под условие либо леммы о 2-раскрашиваемых графах, либо леммы о раскраске циклов из лекции 11, т. е. $\chi(G)$ также известно.

В некоторых случаях теорема Брукса дает точную оценку хроматического числа. Таков, например, граф G_1, изображенный на рис. 3. В самом деле, $\Delta(G_1) = 3$, и потому, в силу теоремы Брукса, $\chi(G_1) \leqslant 3$. В то же время, G_1 содержит цикл длины 5, и, в силу следствия 2 из лекции 11, $\chi(G_1) > 2$. Поэтому указанная на рис. 3 раскраска графа G_1 в три цвета является оптимальной, т. е. $\chi(G_1) = 3$. В некоторых случаях оценка хроматического числа, даваемая теоремой Брукса, не является точной, но близка к ней. Например, для графа G_2, изображенного на рис. 3, имеем $\Delta(G_2) = 4$, и потому из теоремы Брукса вытекает, что $\chi(G_2) \leqslant 4$. На самом же деле $\chi(G_2) = 3$ (оптимальная раскраска графа G_2 указана на рис. 3).



G_1



G_2

Рис. 3

В то же время, существуют графы, для которых оценка хроматического числа, даваемая теоремой Брукса, совершенно неудовлетворительна. Например, $\chi(K_{1,1000}) = 2$, но из теоремы Брукса вытекает лишь, что $\chi(K_{1,1000}) \leqslant 1000$. Заметим, что степени всех вершин графа G_1, изображенного на рис. 1, равны 3, а степени всех вершин графа G_2 с того же рисунка колеблются от 2 до 4. В то же время, в графе $K_{1,1000}$ одна вершина имеет степень 1000, а тысяча вершин — степень 1. Эти три примера являются проявлениями следующей закономерности:

- как правило, теорема Брукса дает хорошую оценку хроматического числа графа в том случае, когда степени его вершин близки друг к другу, и очень грубую оценку в случае, когда граф содержит вершины с сильно различающимися степенями.

Впрочем, эта закономерность (в обеих своих частях) может нарушаться:

- для любого натурального $n \geqslant 2$ существует связный неполный граф G такой, что $\Delta(G) \geqslant 3$, $\Delta(G) - \delta(G) = n$ (здесь $\delta(G)$ — минимум из степеней вершин графа G), но $\chi(G) = \Delta(G)$ (например, граф K'_{n+1}, построенный на слайде 13 в лекции 11);
- для любого натурального n существует связный неполный граф G такой, что $\Delta(G) \geqslant 3$, все вершины графа имеют одну и ту же степень, но $\Delta(G) - \chi(G) = n$ (например, двудольный граф $K_{n+2,n+2}$).

Возможности получения хороших верхних оценок хроматического числа при помощи теоремы Брукса значительно увеличатся, если использовать следующее простое

Замечание

Если v — вершина графа G, то $\chi(G) \leqslant \chi(G - v) + 1$. □

Это замечание само по себе позволяет получить точную оценку, например, для графа $K_{1,1000}$, упомянутого на предыдущем слайде: удалив единственную вершину «маленькой» доли этого двудольного графа, получим пустой граф, хроматическое число которого равно 1. Тогда $\chi(K_{1,1000}) \leqslant 1 + 1 = 2$.

Пусть теперь в графе G 1000 вершин, 10 из которых имеют степень более 500, а все остальные — не более 10 (подобное распределение степеней характерно, например, для графов компьютерных сетей). Удалив из G 10 вершин большой степени, получим граф, для которого теорема Брукса дает оценку 10 (возможно, и меньше, если при удалении вершин максимум из степеней оставшихся вершин уменьшился). Тем самым, исходный граф можно раскрасить не более чем в 20 цветов. В то же время, «лобовое» применение теоремы Брукса дало бы результат больший 500.

Для того, чтобы доказать теорему Брукса, нам понадобятся вспомогательные результаты, опирающиеся как на старые, так и на новые понятия. Мы будем использовать понятия точки сочленения, двусвязного графа и компоненты двусвязности графа (см. лекцию 5). Компоненты двусвязности будем называть *блоками*.

Определение

Графом блоков графа G называется граф G^*, множество вершин которого есть объединение множества блоков и множества точек сочленения графа G, а множество ребер состоит из всех пар (блок, точка сочленения), в которых точка сочленения принадлежит блоку.

На рис. 4 приведен пример графа и его графа блоков (точки сочленения выделены красным).

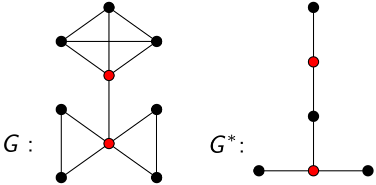


Рис. 4. Граф и его граф блоков

Лемма о графе блоков

Граф блоков связного графа является деревом.

Доказательство. Пусть G — связный граф, а G^* — его граф блоков. Нужно проверить связность и отсутствие циклов в G^*. Докажем, что любые блоки B и B' соединены маршрутом в G^*. Выберем в графе G вершины $u \in B$ и $v \in B'$. В силу связности графа G в нем существует (u, v)-цепь. Отметим на ней точки сочленения (см. рис. 5). Каждый фрагмент цепи между точками сочленения принадлежит какому-то блоку:

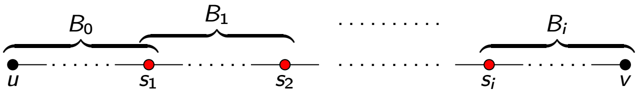


Рис. 5

Последовательность $B = B_0, s_1, B_1, \ldots, s_i, B_i = B'$ определяет (B, B')-маршрут в графе G^*. Поскольку любая точка сочленения смежна в G^* некоторому блоку, маршрутом связаны любые две вершины в G^*.

Нетрудно заметить, что если граф G^* содержит некий цикл $B_1 \to s_1 \to B_2 \to \cdots \to B_i \to s_i \to B_1$, то подграф, порожденный в G всеми вершинами блоков $B_1, \ldots, B_i$, двусвязен. Но это противоречит определению блока, а значит, в G^* нет циклов. $\square$

Лемма о раскраске блоков

Хроматическое число графа равно максимуму из хроматических чисел его блоков.

Доказательство данной леммы дано на следующих двух слайдах. Введем еще одно необходимое понятие.

Заметим, что в любом дереве есть хотя бы две вершины степени 1 (это вытекает из соотношения между числом вершин и числом ребер, см. лекцию 6). Поскольку точка сочленения графа принадлежит хотя бы двум его блокам, все вершины степени 1 в графе блоков являются блоками.

Определение

Пусть G — связный граф. Блоки графа G, являющиеся вершинами степени 1 в графе блоков, называются *концевыми*.

Доказательство. Пусть G — произвольный граф. Замечание о компонентах связности позволяет считать, что G связен. Проведем доказательство индукцией по числу блоков графа G. *База индукции*: если G содержит только один блок, то доказываемое утверждение очевидно.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение леммы справедливо для графов, имеющих $\leqslant k$ блоков, а граф G имеет $k+1$ блок. Обозначим через B произвольный концевой блок графа G, а через G' — объединение всех его остальных блоков, см. рис. 6. Графы B и G' имеют ровно одну общую вершину (которая, в силу свойства 2 из лекции 5, является точкой сочленения). Обозначим ее через v. Пусть r — максимум из хроматических чисел блоков графа G. Ясно, что $\chi(B) \leqslant r$. Поскольку граф G' имеет $\leqslant k$ блоков, из предположения индукции вытекает, что $\chi(G') \leqslant r$. Зафиксируем произвольные оптимальные раскраски графов B и G' и рассмотрим два случая.

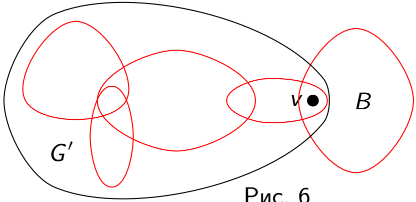


Рис. 6

Случай 1: вершина v в графах B и G' раскрашена одинаково. Ясно, что в этом случае мы получили правильную раскраску графа G в $\max\{\chi(B), \chi(G')\} \leqslant r$ цветов.

Случай 2: вершина v в графах B и G' раскрашена по-разному: в графе B — в i-й цвет, а в графе G' — в j-й цвет, причем $i \neq j$. Изменим раскраску графа B: все вершины этого графа, раскрашенные в i-й цвет, перекрасим в j-й цвет, и наоборот. Очевидно, что в новая раскраска графа B останется правильной, причем теперь вершина v в графах B и G' раскрашена одинаково. Таким образом, мы свели ситуацию к уже рассмотренному случаю 1. $\square$

Приступим к доказательству теоремы Брукса. Пусть G — связный неполный граф и $\Delta(G) \geqslant 3$. Требуется доказать, что $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$. В силу леммы о раскраске блоков достаточно доказать теорему для двусвязного графа G. В самом деле, если для каждого блока B графа G существует правильная $\Delta(B)$-раскраска, то, объединяя эти раскраски по индукции, как в доказательстве леммы о раскраске блоков, мы получим правильную раскраску графа G в $\max\{\Delta(B) \mid B -$ блок в $G\} \leqslant \Delta(G)$ цветов. Итак, далее мы считаем, что *граф G двусвязен*. Нам потребуется следующая

Лемма

В графе G существуют вершины u и v такие, что $\rho(u, v) = 2$ и граф $G - \{u, v\}$ связен.

Доказательство. Если в G есть вершина x, смежная со всеми остальными вершинами, в качестве u и v можно взять любые две несмежные вершины (такие вершины есть, поскольку G — не полный, $\rho(u, v) = 2$ ввиду наличия цепи $u \to x \to v$, а в графе $G - \{u, v\}$ любые две вершины связаны цепью, проходящей через x). Поэтому далее считаем, что для любой вершины в G найдется вершина, с ней не смежная.

Выберем в G вершину x наибольшей степени (по условию, $\rho(x) \geqslant 3$) и рассмотрим граф $G - x$.

Доказательство теоремы Брукса (2)

Если граф $G - x$ двусвязен, найдем в G вершину v такую, что $\rho(x, v) = 2$ (для этого выберем любую вершину w, не смежную с x, построим кратчайшую (x, w)-цепь и возьмем в ней вершину на расстоянии 2 от x). Граф $G - x - v = G - \{x, v\}$ связен ввиду двусвязности графа $G - x$.

Осталось рассмотреть случай, когда граф $G - x$ не двусвязен. Пусть B — концевой блок графа $G - x$ и s — точка сочленения этого графа, принадлежащая блоку B. Среди вершин блока B, отличных от s, найдется вершина, смежная в графе G с x (см. рис. 7), так как в противном случае вершина s была бы точкой сочленения графа G, который двусвязен по условию. Пусть также B' — отличный от B концевой блок в $G - x$, а v — вершина в B', смежная с x и отличная от принадлежащей B' точки сочленения.

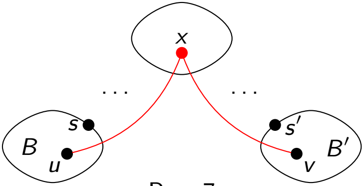


Рис. 7

Поскольку вершины u и v не смежны (лежат в разных блоках) и есть цепь $u \to x \to v$, имеем $\rho(u, v) = 2$. Далее, графы $B - u$ и $B' - v$ связны (поскольку графы B и B' двусвязны), и потому граф $G - \{u, v, x\}$ связен. Но вершина x смежна по крайней мере с одной вершиной графа G, отличной от u и v (поскольку $\rho(x) \geqslant 3$). Следовательно, граф $G - \{u, v\}$ также связен. Лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы Брукса. Пусть u и v — вершины графа G, существование которых установлено в лемме. Поскольку $\rho(u, v) = 2$, в графе G есть вершина x, смежная и с u, и с v. А из того, что граф $G - \{u, v\}$ связен, вытекает, что x смежна еще и по крайней мере с одной вершиной этого графа. Упорядочим вершины графа $G - \{u, v\}$ следующим образом. Положим $v_1 = x$. Через v_2 обозначим произвольную вершину графа $G - \{u, v\}$, смежную с x. Далее, предположим, что вершины $v_1, v_2, \ldots, v_i$ уже выбраны и в графе $G - \{u, v\}$ есть другие вершины. Поскольку граф $G - \{u, v\}$ связен, среди его еще не выбранных вершин найдется вершина, смежная с хотя бы одной из вершин $v_1, v_2, \ldots, v_i$. Обозначим ее через v_{i+1} и продолжим этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем все вершины графа $G - \{u, v\}$.

В результате мы получим последовательность $v_1, v_2, \dots, v_n$, включающую все вершины графа $G - \{u, v\}$ и обладающую следующим свойством: для всякого $i = 2, \dots, n$ найдется j такое, что $1 \leqslant j < i$ и вершины v_i и v_j смежны.

Положим $k = \Delta(G)$ и раскрасим граф G в $\leqslant k$ красок следующим образом. Вначале раскрасим вершины u и v в один цвет (это возможно, так как они не смежны). Затем раскрасим поочередно вершины $v_n, \dots, v_2$ (в этом порядке). В момент раскраски вершины v_i хотя бы одна из смежных с ней вершин не раскрашена (это вершина v_j, упомянутая выше). Значит, раскрашенных вершин, смежных с v_i, не более $k - 1$, т. е. найдется «незанятый» цвет, в который можно раскрасить v_i.

Наконец, раскрасим вершину $v_1 = x$. С ней смежны не более k вершин, две из которых (u и v) раскрашены в один цвет. Значит, один из k цветов точно не совпадает с цветом никакой из смежных с x вершин; в него и раскрасим x, получая в итоге правильную раскраску графа G в $\leqslant k$ красок. Тем самым теорема Брукса доказана. $\square$

Следствие

Из теоремы Брукса вытекает

Следствие

Если G — связный неполный граф и $\Delta(G) \geqslant 3$, то при любой оптимальной раскраске графа G в этом графе найдутся две одинаково раскрашенные вершины, расстояние между которыми равно 2.

Доказательство. В силу теоремы Брукса $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$. Следовательно, найдется вершина v графа G, степень которой не меньше $\chi(G)$. При этом смежные с v вершины раскрашены в цвета, отличные от цвета v, т. е. этих цветов не больше $\chi(G) - 1$. Значит, среди вершин, смежных с v, найдутся две одинаково раскрашенные вершины. Ясно, что эти две вершины не смежны между собой, иначе раскраска графа не была бы правильной. Следовательно, расстояние между ними равно 2. $\square$