## 3. Східний кросворд (Данило Мисак)

Замість «кросворда» казатимемо «матриця», замість «зафарбованих клітин» — «одиниці», а замість «незафарбованих клітин» — нулі. Позначимо кількість одиниць в -му стовпці через , , а кількість одиниць в -му рядку — через , . Уважатимемо, що (обидві суми дорівнюють загальній кількості одиниць у матриці). Інакше можна відразу стверджувати, що потрібної матриці не існує.

Розглянемо набір з перших стовпців. Для кожного з них ми знаємо, скільки в даному стовпці має бути одиниць, а отже, і загальну кількість одиниць у цих стовпцях: . З іншого боку, в -му рядку в цих стовпцях буде не більше ніж одиниць, тому загальна кількість одиниць у цих стовпцях не може перевищувати . Звідси маємо необхідну умову для існування матриці чисел, що задовольняє умову задачі:

Дану умову позначимо через (\*).

Оскільки завжди без втрати загальності можна переставити будь-які стовпці місцями, можемо розставити стовпці в порядку спадання (незростання) кількості одиниць у них. Таким чином ми досягнемо того, що для довільного сума буде максимально можливою, а виведена вище умова необхідності — максимально суворою. При цьому для зручності вважатимемо, що рядки також впорядковані, але за зростанням (неспаданням) кількості одиниць, тобто — максимальний рядок, — другий за величиною і т. д.

Переформулюємо виведену умову без алгебри: для довільного , , сума найбільших кількостей по стовпцях не перевищує суму всіх кількостей по рядках, якщо всі ці кількості попередньо «обрізати» до , тобто всі числа, більші за , зменшити до . Покажемо, що ця умова є й достатньою для існування відповідної матриці. Для цього заповнимо перший стовпець (у якому має бути найбільша кількість одиниць) так: поставимо одиниці в тих рядках, де загальна кількість одиниць має бути найбільшою. По-перше, це зробити можливо, адже якщо в (\*) підставити , матимемо, що не перевищує кількості ненульових рядків. По-друге, коли ми це зробимо, то перейдемо до меншої підзадачі: сконструювати матрицю вже з стовпцями з сумами , , ..., і з рядками із сумами , , ..., , , , ..., (при цьому впорядкованість , , ..., за неспаданням може порушитись, але це не впливає на правильність розв’язання). Якщо ми покажемо, що відповідні числа знову задовольняють (\*), такі ж операції можна буде продовжити, поки ми не побудуємо матрицю повністю. Отже, нам треба довести таку нерівність:

Знайдемо таке найменше , що серед чисел , , ..., таких, які більші або рівні , буде не менше за , а чисел, які більші або рівні , — не більше за . Таке обов’язково знайдеться і буде не більшим за , адже за умовою (\*) при чисел, не менших за , є не менше за , а чисел, більших за , бути не може в принципі.

Тоді для маємо:

Водночас для :

Отже, залишається відсортувати підрахунком, а точніше — підрахувати індексні масиви для обох послідовностей: кількостей одиниць по стовпцях і по рядках. Якщо в масиві кількостей по стовпцях достатньо йти і щораз додавати до суми нові елементи в порядку їх спадання, то для масиву кількостей по рядках потрібно зберігати кількість на поточний момент часу чисел, не менших за дане (оновлювати його можна, щораз віднімаючи кількість чисел, які дорівнюють даному), та на кожному кроці додавати цю кількість до суми . Далі порівнювати та .