Тема 6. Аналітична геометрія на площині.

Лекція 6.2. Точки та прямі лінії на площині.

Рівняння прямої

Будь-якій прямій на площині в декартовій прямокутній системі координат відповідає лінійне рівняння, тобто рівняння першого степеня відносно змінних x і y.

Цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки, яка лежить на цій прямій. І навпаки, цьому рівнянню не задовольняють координати жодної точки, які цій прямій не належать.

Якщо в рівняння прямої підставити числове значення будь-якої із двох змінних, то розв'язавши рівняння відносно іншої змінної, можна отримати координати точки, яка належить цій прямій.

Існують різні форми запису рівняння прямої, зручні для розв'язування різних задач. При цьому у кожному випадку використовується свій специфічний геометричний закон побудови прямої.

1. Загальне рівняння прямої.

Загальне рівняння прямої має вигляд $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, в якому коефіцієнти A і B не дорівнюють нулю одночасно. Окремі випадки загального рівняння прямої такі:

	Значення коефіцієнтів	Рівняння прямої	Положення прямої відносно системи координат
1	$C = 0$	$A \cdot x + B \cdot y = 0$	Похила пряма, яка проходить через початок координат
2	$A = 0$	$y = -\frac{C}{B}$	Горизонтальна пряма
3	$B = 0$	$x = -\frac{C}{A}$	Вертикальна пряма
4	$A = 0, C = 0$	$y = 0$	Горизонтальна пряма, яка співпадає з віссю Ox
5	$B = 0, C = 0$	$x = 0$	Вертикальна пряма, яка співпадає з віссю Oy

Відомо, що через дві точки на площині можна провести пряму, і до того ж тільки одну. Цю геометричну аксіому можна застосувати для визначення коефіцієнтів загального рівняння прямої.

Якщо пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, то коефіцієнти загального рівняння прямої можна обчислити за наступними формулами: $A = y_2 - y_1$, $B = x_1 - x_2$, $C = -A \cdot x_1 - B \cdot y_1$.

2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Кутовим коефіцієнтом прямої називається тангенс кута φ нахилу прямої до осі Ox, який відраховується в додатному напрямі (від осі до прямої проти годинникової стрілки). Цей кут завжди розглядається в межах від нуля до π, тобто $0 \le \varphi < \pi$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд $y = k \cdot x + b$, де $k = tg\,\varphi$ – кутовий коефіцієнт, b – початкова ордината, тобто точка перетину прямої з віссю Oy (рис. 6.2а).

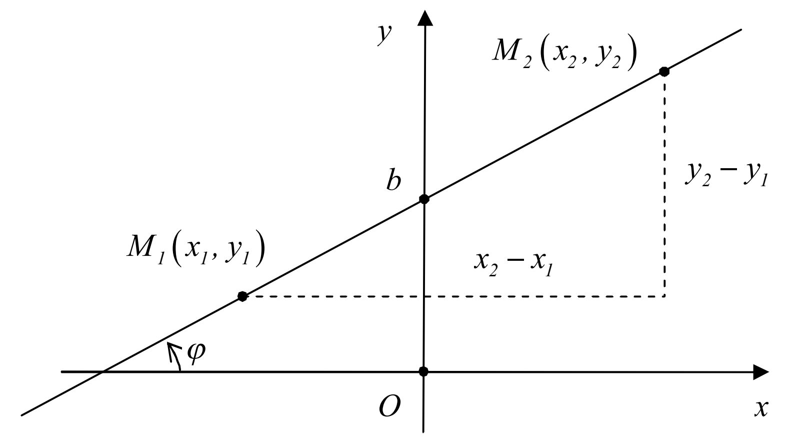

Рис. 6.2а

Якщо відоме загальне рівняння прямої, то до рівняння з кутовим коефіцієнтом можна перейти за допомогою формул $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$.

Якщо пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, то кутовий коефіцієнт та початкову ординату можна визначити за формулами $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ і $b = y_1 - k \cdot x_1$.

Відмітимо, що рівняння з кутовим коефіцієнтом неможливо записати для вертикальної прямої, оскільки для неї $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і кутовий коефіцієнт $tg\,\varphi$ не існує. Зокрема це проявляється в тому, що для обчислення k неможливо скористуватись жодною з наведених формул: формулою $k = -\frac{A}{B}$ – тому, що $B = 0$, формулою $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ – тому, що для вертикальної прямої $x_1 = x_2$.

Окремі випадки:

а) пряма проходить через початок координат; при цьому $b = 0$ і рівняння прямої має вигляд $y = k \cdot x$;

б) пряма горизонтальна; при цьому її кутовий коефіцієнт $k = 0$ і рівняння прямої має вигляд $y = b$;

в) пряма вертикальна; при цьому її кутовий коефіцієнт не існує і рівняння прямої має вигляд $x = a$, де a – точка перетину прямої з віссю Ox.

3. Рівняння прямої у відрізках.

Вже згадувалось, що через дві точки на площині можна провести єдину пряму. Нехай пряма, яка не проходить через початок координат, утворює ці дві точки внаслідок перетину з обома осями координат (рис. 6.2б).

Перша точка $M_1(a, 0)$ знаходиться на осі Ox і відтинає на ній відрізок a. Друга точка $M_2(0, b)$ знаходиться на осі Oy і відтинає на ній відрізок b.

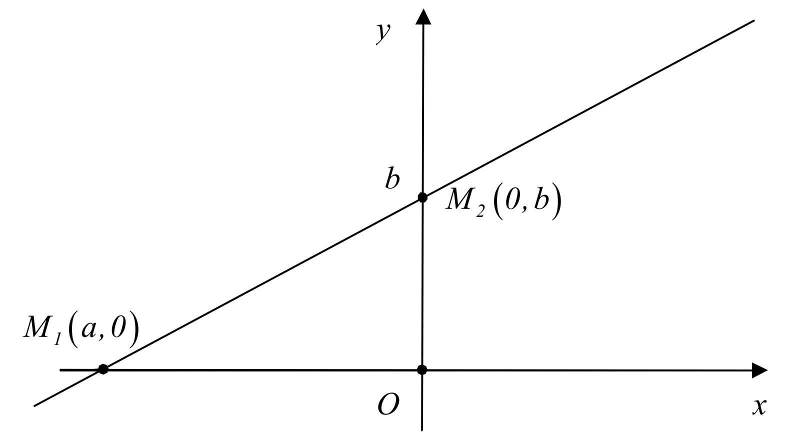

Рис. 6.2б

Для побудови рівняння прямої у відрізках застосуємо загальне рівняння прямої $A\cdot x+B\cdot y+C=0$, в якому жодний з коефіцієнтів A, B і C не дорівнює нулю (інакше побудова рівняння прямої у відрізках стає неможливою). Загальному рівнянню прямої мають задовольняти обидві точки $M_1(a,0)$ і $M_2(0,b)$. Підставляємо їх у рівняння:

$$\begin{cases} A\cdot a+B\cdot 0=C \\ A\cdot 0+B\cdot b=C \end{cases}.$$

Із отриманої системи знаходимо: $A=-\frac{C}{a}$, $B=-\frac{C}{b}$. З урахуванням цих формул загальне рівняння прямої набуває наступного вигляду: $-\frac{C}{a}\cdot x-\frac{C}{b}\cdot y+C=0$. Після спрощень отримуємо рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де a і b – точки перетину прямої з осями Ox і Oy відповідно.

Для безпосереднього переходу від загального рівняння прямої до рівняння у відрізках застосовують формули $a=-\frac{C}{A}$, $b=-\frac{C}{B}$.

4. Рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі.

Припустимо, що задано точку $A(x_A,y_A)$, через яку має проходити пряма із заданим кутовим коефіцієнтом k, який визначає її напрям.

Розглянемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y=k\cdot x+b$. В ньому є невідомою початкова ордината b, для знаходження якого застосуємо умову проходження прямої через задану точку $A(x_A,y_A)$. Підставляємо координати точки у рівняння прямої і отримуємо ще одне рівняння: $y_A=k\cdot x_A+b$. Виключаємо із цих рівнянь невідому b шляхом віднімання другого рівняння із першого.

Таким чином, рівняння прямої, що проходить через задану точку $A(x_A,y_A)$ у заданому напрямі, має вигляд $y-y_A=k\cdot(x-x_A)$, де k – кутовий коефіцієнт заданого напрямку. Це рівняння називають також рівнянням пучка прямих, які проходять через одну й ту ж точку (центр пучка) у різних напрямах.

У складі цього пучка відсутня лише одна вертикальна пряма, оскільки для неї кутовий коефіцієнт не існує.

5. Нормальне рівняння прямої.

Пряму лінію можна задати за допомогою нормалі.

Нормаллю називається перпендикуляр, опущений з початку координат на дану пряму. Нехай для нормалі OM даної прямої відомі її довжина p, а також кут α, який вона утворює з віссю Ox (рис. 6.2в). При цьому для довжини нормалі виконується умова $p>0$, а кут α відраховується в додатному напрямі (від осі Ox проти годинникової стрілки) в межах від нуля до $2\cdot\pi$.

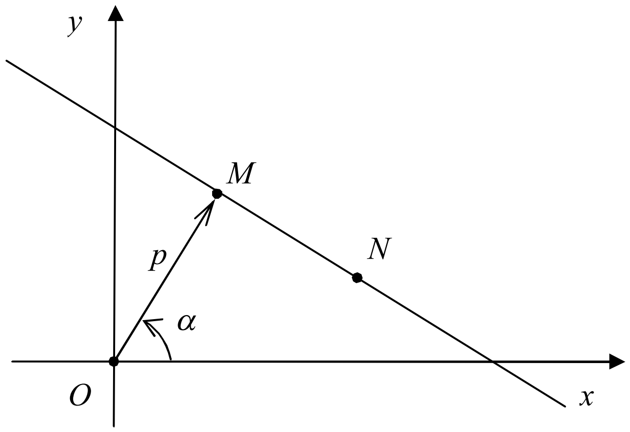

Рис. 6.2в

Розглянемо вектор $\overline{OM}$. Його проекції на осі Ox та Oy співпадають з координатами точки M і дорівнюють $p\cdot cos\alpha$ і $p\cdot sin\alpha$ відповідно. Отже, $\overline{OM}=p\cdot cos\alpha\cdot\bar{i}+p\cdot sin\alpha\cdot\bar{j}$.

Тепер виберемо на прямій довільну точку $N\left(x,y\right)$ і розглянемо вектор $\overline{MN}$. Його координати є різницями однойменних координат кінця та початку вектора. Отже, $\overline{MN}=\left(x-p\cdot cos\alpha\right)\cdot\bar{i}+\left(y-p\cdot sin\alpha\right)\cdot\bar{j}$.

Оскільки вектори $\overline{OM}$ і $\overline{MN}$ взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\overline{OM}\cdot\overline{MN}\quad p\cdot cos\alpha\cdot\left(x-p\cdot cos\alpha\right)+p\cdot sin\alpha\cdot\left(y-p\cdot sin\alpha\right)\quad 0.$$

Після спрощень отримуємо рівняння прямої у вигляді $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0$. Це рівняння називається нормальним рівнянням прямої. Його основні ознаки наступні:

а) член $-p$ у складі рівняння завжди від'ємний;

б) сума квадратів коефіцієнтів при x та y завжди рівна одиниці.

Щоб привести загальне рівняння прямої $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ до нормального вигляду, всі його члени треба помножити на нормуючий множник $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Знак в цій формулі вибирається так, щоб $\mu\cdot C$ було меншим нуля.

Взаємне положення точок та прямих

1. Відстань та відхилення точки від прямої.

Для обчислення відстані та відхилення точки від прямої найзручніше використовувати нормальне рівняння прямої $x\cdot cos\alpha+y\cdot sin\alpha-p=0$.

1). Відстань точки $M_0\left(x_0,y_0\right)$ від заданої прямої можна знайти за формулою $d=\left|x_0\cdot cos\alpha+y_0\cdot sin\alpha-p\right|$. Отже, відстань точки від прямої дорівнює взятому за абсолютною величиною результату підстановки координат точки в нормальне рівняння прямої.

2). Відхилення точки від прямої обчислюється за формулою $\delta = x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \sin\alpha - p$. На відміну від відстані d відхилення δ може бути як додатним, так і від'ємним. Якщо $\delta > 0$, то точка M_0 і початок координат лежать по один бік від прямої. Якщо $\delta < 0$, то точка M_0 і початок координат лежать по різні боки від прямої.

2. Взаємне розташування двох прямих.

Дві прямі задані своїми загальними рівняннями: $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ і $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$. Взаємне розташування двох прямих має наступні варіанти:

1). Прямі перетинаються, якщо справедлива умова $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Точку перетину можна знайти, розв'язавши систему рівнянь, утворену рівняннями прямих.

2). Прямі паралельні, якщо справедлива умова $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

3). Прямі співпадають, якщо справедлива умова $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Тепер нехай дві прямі задані своїми рівняннями з кутовими коефіцієнтами: $y = k_1 \cdot x + b_1$ і $y = k_2 \cdot x + b_2$. В цьому випадку варіанти взаємного розташування прямих мають наступний вигляд:

1). Прямі перетинаються, якщо справедлива умова $k_1 \neq k_2$. Точку перетину можна знайти, розв'язавши систему рівнянь, утворену рівняннями прямих.

2). Прямі паралельні, якщо справедлива умова $k_1 = k_2,\ b_1 \neq b_2$.

3). Прямі співпадають, якщо справедлива умова $k_1 = k_2,\ b_1 = b_2$.

3. Кут між двома прямими.

Кут між двома прямими – це один із двох суміжних кутів, які утворюються при їх перетині. Цей кут завжди розглядається в межах від нуля до π, тобто $0 < \varphi < \pi$. Якщо став відомим один суміжний кут, то другий знаходять за формулою $\pi - \varphi$.

Нехай дві прямі задані своїми загальними рівняннями: $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ і $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$. Зрозуміло, що кут між самими прямими співпадає з кутом між векторами, перпендикулярними до цих прямих. Отже, косинус кута між прямими можна знайти за тією ж формулою, що і косинус кута між векторами. Оскільки в загальному рівнянні прямої коефіцієнти A і B є координатами вектора, перпендикулярного до даної прямої, то косинус кут між прямими можна обчислити за формулою $\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$. В окремому випадку, якщо $\cos\varphi = 0$, прямі є взаємно перпендикулярними. Це еквівалентно тому, що $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

Тепер нехай дві прямі задані своїми рівняннями з кутовими коефіцієнтами: $y = k_1 \cdot x + b_1$ і $y = k_2 \cdot x + b_2$. Тангенс гострого кута між ними можна обчислити за формулою $tg\,\varphi = \left| tg\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) \right| = \left| \frac{tg\,\varphi_2 - tg\,\varphi_1}{1 + tg\,\varphi_2 \cdot tg\,\varphi_1} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|$, де φ_1 і φ_2 – кути нахилу цих прямих до осі Ox. Однак, цією формулою неможливо скористуватись, якщо хоча б одна з прямих вертикальна. В цьому випадку кут між ними треба шукати безпосередньо за формулою $\varphi = \left|\varphi_2 - \varphi_1\right|$.

Ця формула не дає результату також і в тому випадку, коли її знаменник приймає нульове значення. Це буває у разі взаємної перпендикулярності прямих. Отже, умовою взаємної перпендикулярності прямих є рівність $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, тобто коли їх кутові коефіцієнти обернені за абсолютною величиною та протилежними за знаком.

Взаємне розташування прямої та вектора.

1. Пряма, перпендикулярна до заданого вектора.

Побудуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно заданому вектору $\overline{P} = A\cdot\overline{i} + B\cdot\overline{j}$.

Для цього виберемо на прямій довільну точку $N(x, y)$ і розглянемо вектор $\overline{MN} = (x - x_0)\cdot\overline{i} + (y - y_0)\cdot\overline{j}$. Вектори $\overline{P}$ і $\overline{MN}$ взаємно перпендикулярні і тому скалярний добуток $\overline{P}\cdot\overline{MN} = 0$. Звідси отримуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора: $A\cdot(x - x_0) + B\cdot(y - y_0) = 0$.

Якщо в цьому рівнянні розкрити дужки, то отримаємо рівняння виду $A\cdot x + B\cdot y + C = 0$, в якому $C = -A\cdot x_0 - B\cdot y_0$. Отже, в загальному рівнянні прямої коефіцієнти A і B є координатами вектора, перпендикулярного до даної прямої.

2. Пряма, паралельна заданому вектору.

Побудуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно заданому вектору $\overline{P} = A\cdot\overline{i} + B\cdot\overline{j}$.

Для цього виберемо на прямій довільну точку $N(x, y)$ і розглянемо вектор $\overline{MN} = (x - x_0)\cdot\overline{i} + (y - y_0)\cdot\overline{j}$. Вектори $\overline{P}$ і $\overline{MN}$ колінеарні і тому їх координати пропорційні. Звідси отримуємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку паралельно заданому вектору: $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}$.

Введемо позначення: $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = t$. Проведемо перетворення і отримаємо: $x = x_0 + A\cdot t$, $y = y_0 + B\cdot t$. Ці два рівняння називаються параметричними рівняннями прямої. Змінному параметру t цих рівнянь досить часто надають фізичного змісту. Наприклад, якщо t – час, то дані рівняння описують координатні складові рівномірного прямолінійного руху точки вздовж прямої.