Дискретна математика

Зима-Весна 2011

Лекція 5
Комбінаторний аналіз

Терновой Максим Юрійович
к.т.н., с.н.с., доцент кафедри інформаційно-телекомунікаційних мереж

Питання, які будуть розглянуті

1. Основні принципи комбінаторики. Загальне поняття вибірки
2. Розміщення з повтореннями та без повторень
3. Комбінації з повтореннями та без повторень
4. Впорядковані розбиття
5. Біноміальні та поліноміальні формули
6. Застосування кореневих дерев в комбінаторних задачах

1. Основні принципи комбінаторики. Загальне поняття вибірки

Загальні поняття

Комбінаторний аналіз є складовою частиною комбінаторики, науки, межі якої, як і багатьох розділів математики, чітко не визначені, але основним завданням якої є перерахунок і переліченння елементів у скінченних множинах.

Правило (принцип) суми

Нехай A і B – скінченні множини, які не перетинаються ($A \cap B = \varnothing$), $|A| = m$, $|B| = n$ (де рисками $|\,|$ позначена кількість елементів).

Тоді $|A \cup B| = m + n$.

У комбінаториці це твердження називається *правилом суми* і звичайно формулюється так:

Якщо об'єкт a може бути вибраний m способами, а об'єкт b – іншими n способами, то вибір «або a, або b» може бути здійснений $m + n$ способами.

Правило суми

Вибори a та b є взаємовиключними, тому що $A \cap B = \varnothing$, тобто жоден із способів вибору об'єкта a не збігається з жодним із способів вибору об'єкта b.

Правило суми можна розповсюдити на випадок декількох множин. Тоді воно отримується таким чином:

Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_k$ – скінченні множини, які попарно не перетинаються, тобто $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$.

Правило (принцип) добутку

Нехай A і B – скінченні множини, які не перетинаються, $|A| = m$, $|B| = n$. Тоді $|A \times B| = m \cdot n$.

У комбінаториці це твердження називається *правилом добутку* і звичайно формулюється так:

Якщо об'єкт a може бути вибраний m способами і після кожного з таких виборів об'єкт b, у свою чергу, може бути вибраний n способами, то вибір «a та b» у вказаному порядку можна здійснити mn способами.

Це правило використовується тоді, коли способи вибору a і b – незалежні.

Правило добутку

Правило добутку теж можна розповсюдити на випадок декількох множин. Тоді воно формулюється таким чином.

Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_k$ – довільні множини, $|X_i| = n_i$, $i = \mathbf{1,2,\ldots,}k$. Тоді

$$\left|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k\right| = \left|\{(x_1, x_2, \ldots, x_k)\}\right| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Правило добутку

Іншими словами:

Якщо об'єкт x_1 може бути вибраний n_1 способами, після чого об'єкт x_2 може бути вибраний n_2 способами, і для будь-якого i, де $2 \le i \le k-1$, після вибору об'єктів $x_1, \dots, x_i$ об'єкт x_{i+1} може бути вибраний n_{i+1} способами, то вибір упорядкованої послідовності m об'єктів $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ може бути здійснений $n_1 n_2 \cdots n_k$ способами.

Приклад 1

Нехай є дві урни, в одній – 4 червоних кулі, в другій – 3 білі (рис.1.). Вибираємо одну кулю з будь-якої урни. Скількома способами можливо зробити вибір однієї (червоної або білої) кулі?

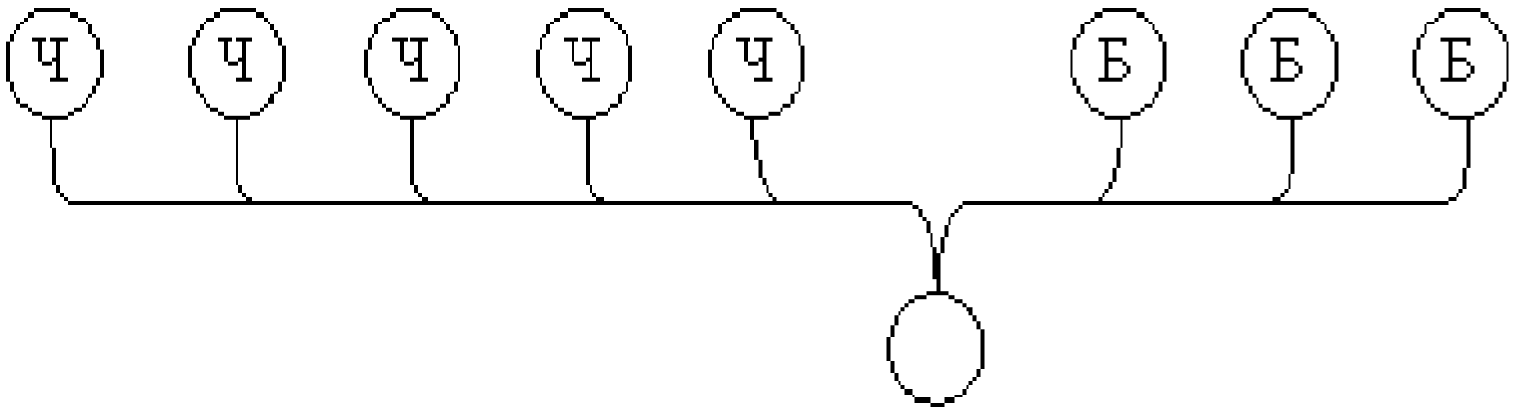

Рис. 1

Приклад 1

Вибори червоної або білої кулі взаємовиключні.

Позначимо $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ – множину червоних куль, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ – множину білих куль $|A| = 5$, $|B| = 3$.

За правилом суми вибір однієї кулі „червона або біла" може бути здійснений $|A \cup B| = |A| + |B| = 5 + 3 = 8$ способами.

Приклад 2

Нехай існує 5 шляхів, що з'єднують місто X з містом Y і 2 шляхи, що з'єднують місто Y з містом Z. Треба визначити кількість маршрутів з міста X до міста Z (рис. 2).

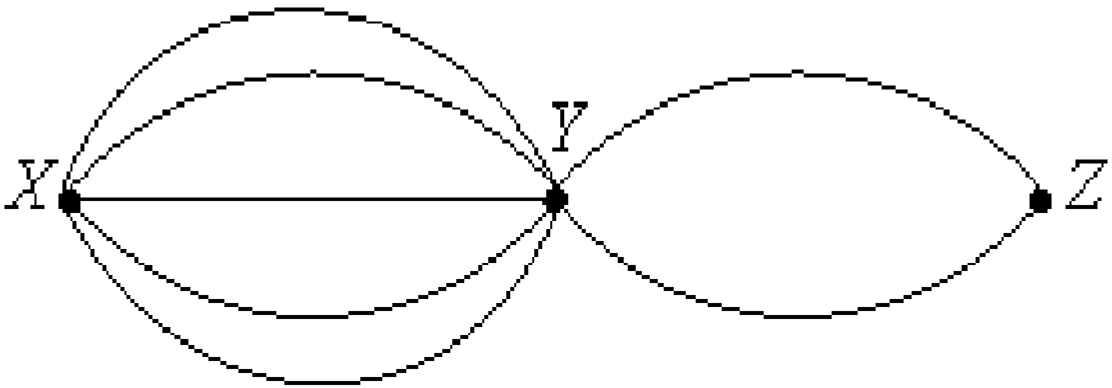

Рис. 2

Приклад 2

Для рішення цієї задачі введемо дві множини:

$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ - множина шляхів з міста X до міста Y, $B=\{b_1,b_2\}$ – множина шляхів з міста Y до міста Z.

Кожен маршрут з міста X до міста Z подається парою (a_i,b_j), де $i=1,2,3,4,5$; $j=1,2$.

Тоді $A\times B$ – це множина шляхів з міста X до міста Z, кількість яких дорівнює $|A\times B|=5\cdot 2=10$

Принцип Діріхлє

Нехай елементи множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ необхідно розмістити по m комірках, причому $n>m$. Тоді принаймні одна з комірок буде містити більше одного елемента.

Принцип Діріхлє. Приклад

1) Нехай 5 студентів складають іспит за стандартною чотирибальною системою ("відмінно", "добре", "задовільно", "незадовільно"). Тоді, за принципом Діріхлє, принаймні два студенти отримають однакові оцінки.

Принцип Діріхлє. Приклад

2) Згідно з принципом Діріхлє, в місті Києві в 1999 році знайдеться принаймні дві людини з однаковим числом волосин на голові (оскільки кількість жителів Києва в 1999 році перевищувала можливе число волосин на голові людини).

Вибірка

Означення 4.1. Виборкою з множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ довжиною (об'ємом) k називається довільний набір елементів $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{j_k}$, причому елементи виборки в загальному випадку можуть повторюватись.

Якщо всі елементи виборки попарно різні ($a_{j_p} \neq a_{j_q}$ при $p \neq q$), виборка називається виборкою без повторень. Якщо повторення дозволяються (але не вимагаються), виборка називається виборкою з повтореннями.

Розміщення, комбінація, переставлення

Якщо на виборці задане відношення лінійного порядку, виборка називається впорядкованою виборкою, або розміщенням. Якщо відношення порядку не задане (порядок елементів виборки не враховується) виборка називається невпорядкованою виборкою, або комбінацією.

Розміщення без повторень при $n = k$ називається переставленням множини A.

Вибірка з n по k

Оскільки для аналізу властивостей виборок природа елементів a_j не має значення, виборку довжиною k з множини A потужністю n називають виборкою з n по k.

Приклад 1

Приклад 4.4. Нехай в урні знаходяться 3 нумеровані кулі ($к_1$, $к_2$, $к_3$). Необхідно підрахувати, скількома способами можна витягти 2 кулі при наступних умовах.

1. Витягнута куля не повертається до урни; порядок витягування не враховується, тобто виборки типу $к_i, к_j$ та $к_j, к_i$ вважаються однією виборкою. Очевидно, можливі наступні варіанти:

$$к_1, к_2; \quad к_1, к_3; \quad к_2, к_3.$$

Приклад 2

Приклад 4.4. Нехай в урні знаходяться 3 нумеровані кулі ($к_1$, $к_2$, $к_3$). Необхідно підрахувати, скількома способами можна витягти 2 кулі при наступних умовах.

2. Витягнута куля не повертається до урни; порядок витягування враховується, тобто виборки типу $к_i$, $к_j$ та $к_j$, $к_i$ вважаються різними виборками. Очевидно, можливі наступні варіанти:

$$к_1, к_2; \quad к_1, к_3; \quad к_2, к_3;$$

$$к_2, к_1; \quad к_3, к_1; \quad к_3, к_2.$$

Приклад 3

Приклад 4.4. Нехай в урні знаходяться 3 нумеровані кулі ($к_1$, $к_2$, $к_3$). Необхідно підрахувати, скількома способами можна витягти 2 кулі при наступних умовах.

3. Витягнута куля повертається до урни і може бути витягнута знову; порядок витягування не враховується. Очевидно, можливі наступні варіанти:

$$к_1, к_2; \quad к_1, к_3; \quad к_2, к_3; \quad к_1, к_1; \quad к_2, к_2; \quad к_3, к_3.$$

Приклад 4

Приклад 4.4. Нехай в урні знаходяться 3 нумеровані кулі ($к_1$, $к_2$, $к_3$). Необхідно підрахувати, скількома способами можна витягти 2 кулі при наступних умовах.

4. Витягнута куля повертається до урни і може бути витягнута знову; порядок витягування враховується. Очевидно, можливі наступні варіанти:

$$К_1, К_2; \quad К_1, К_3; \quad К_2, К_3; \quad К_2, К_1; \quad К_3, К_1; \quad К_3, К_2.$$

$$К_1, К_1; \quad К_2, К_2; \quad К_3, К_3.$$

Приклади. Пояснення

Очевидно, що чотири розглянуті ситуації відповідають виборкам з 3 по 2 з повтореннями (кулі повертаються і можуть бути витягнуті знову) та без повторень (кулі не повертаються), впорядкованим (з урахуванням порядку) та невпорядкованим (без урахування порядку).

Розв'язання чотирьох проблем прикладу 4.4 в загальному випадку (в урні n нумерованих куль, витягується k куль) зводиться до підрахунку загальної кількості розміщень та комбінацій з повтореннями та без повторень з n по k.

2. Розміщення з повтореннями та без повторень

Розміщення без повторень

Кількість розміщень без повторень з n по k прийнято позначати через P_n^k або A_n^k. Кількість переставлень (випадок $n = k$) прийнято позначати через P_n.

Теорема 4.1. $P_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Наслідок 4.1.1. $P_n = n!$.

Розміщення без повторень. Доведення теореми

Доведення. Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Формування розміщення без повторення з n по k, тобто впорядкованої виборки попарно різних елементів $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jk}$, можна розбити на k послідовних піддій — вибір елементу a_{j1}, вибір елементу a_{j_2}, …, вибір елементу a_{j_k}. Перший елемент (a_{j1}) ми можемо вибрати n способами, другий (a_{j_2}) — $n-1$ способами, оскільки $a_{j_2} \neq a_{j_1}$, і т.д. Тепер твердження теореми випливає з принципу добутку. $\square$

Розміщення з повтореннями

Кількість розміщень з повтореннями з n по k позначатимемо через $\widetilde{P}_n^k$.

Теорема 4.2. $\widetilde{P}_n^k = n^k$.

Розміщення з повтореннями. Доведення теореми

Доведення. Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Формування розміщення з повтореннями з n по k, тобто впорядкованої виборки не обов'язково різних елементів $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}$, можна розбити на k послідовних підій — вибір елементу a_{j_1}, вибір елементу a_{j_2}, …, вибір елементу a_{j_k}. Перший елемент (a_{j_1}) ми можемо вибрати n способами, другий (a_{j_2}) — також n способами, враховуючи можливий випадок $a_{j_2} = a_{j_1}$, і т.д. Тепер твердження теореми випливає з принципу добутку. $\square$

3. Комбінації з повтореннями та без повторень

Комбінації без повторень

Кількість комбінацій без повторень з n по k прийнято позначати через C_n^k або $\binom{n}{k}$. Ми будемо використовувати перше позначення, яке є практично загальноприйнятим в вітчизняній літературі.

Теорема 4.3. $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Комбінації без повторень. Доведення теореми

Доведення. Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. На множині всіх розміщень без повторень з n по k введемо відношення еквівалентності:

$$((a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \sim (a_{j_1}, \ldots, a_{j_k})) \Leftrightarrow (\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} = \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}\}),$$

Комбінації без повторень. Доведення теореми

тобто еквівалентними вважаються ті і тільки ті розміщення, які відрізняються лише порядком елементів (і співпадають як множини). Кожен клас еквівалентності $[(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})]$ за визначенням містить розміщення, що складаються з одних й тих самих елементів $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ і відрізняються лише порядком. Отже, кожному класу еквівалентності $[(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})]$ однозначно відповідає комбінація без повторень $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$. Таке співставлення є взаємно однозначним, оскільки кожен клас еквівалентності визначає рівно одну комбінацію (невпорядковану підмножину), і кожна комбінація відповідає одному класу еквівалентності.

Комбінації без повторень. Доведення теореми

Таким чином, кількість класів еквівалентності (відносно введеного відношення еквівалентності на множині розміщень без повторень з n по k) дорівнює C_n^k. Нарешті, оскільки кожен клас еквівалентності містить $k!$ розміщень (по кількості переставлень на множині $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$), маємо:

$$P_n^k = k! C_n^k,$$

звідки негайно випливає твердження теореми. □

Комбінації без повторень. Зауваження

Числа $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ $(0 \le k \le n)$ називають *біноміальними коефіцієнтами*.

Зауваження 4.1. Біноміальним коефіцієнтам C_n^k часто надають сенс і при $k > n$, встановлюючи для цього випадку $C_n^k = 0$. Таке узагальнення є цілком природним, оскільки кількість виборок без повторень з n по k при $k > n$ дорівнює нулю.

Комбінації без повторень. Приклад

Приклад 4.5. Розглянемо так звану "проблему деталей". Нехай в коробці міститься n деталей m сортів: n_1 деталей першого сорту, n_2 деталей другого сорту, $\ldots$, n_m деталей m-го сорту. З коробки навмання, без урахування порядку, витягується k деталей. Підрахувати кількість невпорядкованих виборок, коли будуть витягнуті рівно k_1 деталей першого сорту, k_2 деталей другого сорту, $\ldots$, k_m деталей m-го сорту $(0 \leq k_j \leq m_j)$.

Комбінації без повторень. Приклад

Оскільки порядок виборки в даній задачі не має значення, ми вважатимемо, що спочатку витягуються деталі першого сорту, потім — другого, і т.д. Тоді кількість виборок, що задовольняють заданій умові, підраховується за правилом добутку: $C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \cdots C_{n_m}^{k_m}$.

Комбінації з повтореннями

Кількість комбінацій з повтореннями з n по k позначатимемо через $\widetilde{C}_n^k$.

Теорема 4.4. $\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Комбінації з повтореннями. Приклад

Підрахуємо кількість "кісток" доміно.

Як відомо, кожна "кістка" доміно взаємно однозначно визначається невпорядкованою парою чисел $\{n, m\}$, таких, що $0 \le m \le 6$, $0 \le n \le 6$, не виключаючи випадок $n = m$. Таким чином, кількість "кісток" доміно дорівнює

$$\tilde{C}_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

4. Впорядковані розбиття

Впорядковані розбиття

Розглянемо наступну проблему: елементи множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ необхідно розташувати по k нумерованих комірках місткостями n_1, n_2, $\ldots$, n_k відповідно, причому $n_1 + \cdots + n_k = n$. Ця проблема носить назву впорядкованого розбиття множини A по k впорядкованих комірках. Підкреслимо, що порядок розташування елементів в кожній комірці не має значення — нас цікавить лише те, в яку комірку потрапить кожен з елементів множини A. Кількість впорядкованих розбиттів за сформульованими параметрами будемо позначати через $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Впорядковані розбиття

Для підрахунку кількості впорядкованих розбиттів скористаємось принципом добутку: спочатку заповнимо першу комірку, потім — другу, і т.д. Очевидно, першу комірку можна заповнити $C_n^{n_1}$ способами, другу — $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами, третю — $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ способами, і т.д. За принципом добутку маємо:

$$C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdots C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k}. \qquad (4.1)$$

Впорядковані розбиття

Зауваження 4.2. Останній множник $C^{m_k}_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} = C^{n_k}_{n_k} = 1$ (що й треба було б чекати, оскільки останню комірку можна заповнити лише одним способом).

Безпосередній підрахунок дозволяє значно спростити вираз в правій частині (4.1):

$$C_n^{m_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Впорядковані розбиття

Зазначимо, що при $k = 2$ ми маємо класичний випадок комбінацій без повторень (невпорядкований вибір елементів для однієї з двох комірок):

$$C_n^{n_1,n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!} = C_n^{n_1} = C_n^{n_2}.$$

Впорядковані розбиття. Приклад

Приклад 4.7. Підрахуємо, скільки слів (довільних послідовностей літер) можна скласти з шести карток, на трьох з яких позначена літера "А", на двох — літера "Б", на одній — "В":

$$\boxed{А}\quad \boxed{А}\quad \boxed{А}\quad \boxed{Б}\quad \boxed{Б}\quad \boxed{В}$$

Впорядковані розбиття. Приклад

Для розв'язання задачі розглянемо таку модель: є три комірки "А", "Б" та "В" місткостями 3, 2 та 1 відповідно, по яких треба розмістити елементи множини $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тоді кожному слову однозначно відповідає розбиття множини X по комірках "А", "Б" та "В" — кожен елемент множини X відповідає номеру літери в слові, що складається. Таким чином кількість слів обчислюється як кількість впорядкованих розбиттів:

$$C_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60.$$

5. Біноміальні та поліноміальні формули

Біноміальна формула (біном Ньютона)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}. \qquad (4.2)$$

Формула (4.2), як відомо, носить назву *біном Ньютона*, або *біноміальна формула*, звідки отримали назву коефіцієнти C_n^k.

Біноміальна формула (біном Ньютона)

Зауваження 4.3. Назва "біном Ньютона" є двічі неправильною: по-перше, ані права, ані ліва частина формули (4.2) не є біномом (двучленом); по-друге, формула (4.2) була відома і до робіт Ньютона (Ісааку Ньютону належить важливе узагальнення формули (4.2) на випадок довільного $n \in \mathbb{R}$).

Біноміальна формула (біном Ньютона)

Ми доведемо біноміальну формулу (4.2) методами комбінаторики. Розкриємо дужки в виразі $(a+b)^n$, не користуючись комутативністю множення дійсних чисел:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{n} = \underbrace{aa\cdots a}_{n} + \underbrace{ba\cdots a}_{n} + \underbrace{ab\cdots a}_{n} + \cdots + \underbrace{bb\cdots b}_{n}.$$

Біноміальна формула (біном Ньютона)

Після "приведення подібних членів" (користуючись комутативністю множення) отримуємо вираз:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k b^{n-k},$$

де c_k — кількість доданків виду $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ $(\alpha_j \in \{a, b\})$, таких, що множник a міститься в добутку $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ рівно k разів (множник b міститься відповідно $n-k$ разів).

Біноміальна формула (біном Ньютона)

Для обчислення коефіцієнтів c_k розглянемо комбінаторну модель розташування множників α_j $(1 \le j \le n)$ по комірках a та b місткостями k та $n-k$ відповідно. Очевидно, кожне таке розташування однозначно відповідає одному з доданків $\alpha_1 \cdots \alpha_n$, що містить k множників a та $n-k$ множників b. Таким чином,

$$c_k = C_n^{k,n-k} = C_n^k,$$

що і треба було довести.

Поліноміальна формула

Комбінаторне доведення формули (4.2) природним чином поширюється для виразу $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} C_n^{k_1, \ldots, k_m} a_1^{k_1} \cdots a_m^{k_m}. \qquad (4.3)$$

Поліноміальна формула

Формула (4.3), за аналогією з біноміальною формулою, отримала назву *поліноміальна формула*. Зазначимо, що кількість доданків в правій частині формули (4.3) обчислюється як кількість розбиттів числа n на m невід'ємних цілих доданків, тобто через комбінації з повтореннями: $\tilde{C}_m^n = C_{m+n-1}^n$. Так, при $m = 2$ (випадок біноміальної формули) отримуємо: $C_{n+1}^n = n + 1$.

Поліноміальна формула. Приклад 1

Користуючись поліноміальною формулою, розкриємо дужки в виразі $(a+b+c)^3$:

$$(a+b+c)^3 = \underbrace{C_3^{3,0,0}}_{=1} a^3b^0c^0 + b^3 + c^3 +$$

$$+ \underbrace{C_3^{2,1,0}}_{=3} a^2b^1c^0 + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + \underbrace{C_3^{1,1,1}}_{=6} a^1b^1c^1.$$

Поліноміальна формула. Приклад 2

Не розкриваючи повністю дужки в виразі $(a+b+c+d)^{132}$, обчислимо коефіцієнт при доданку $a^{131}b$:

$$C_{132}^{131,1,0,0} = \frac{132!}{131!1!0!0!} = 132.$$

Зазначимо, що загальна кількість доданків після розкриття дужок та зведення подібних членів дорівнює $\tilde{C}_4^{132} = 400995$.

Трикутник Паскаля

В багатьох випадках (зокрема, для обчислення коефіцієнтів в біномі Ньютона) біноміальні коефіцієнти зручно розташовувати в формі так званого *трикутника Паскаля*:

$$
\begin{array}{llll}
C_0^0 & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
\multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
\quad \text{або} \quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
$$

Трикутник Паскаля

Трикутник Паскаля, очевидно, нескінченний, проте на практиці обчислюють кілька перших рядків (так, для розкладу $(a+b)^5$ потрібні перші 6 рядків).

При обчисленні перших рядків трикутника Паскаля (в "прямокутній" чи в "рівнобедреній" формі), як правило, виписують одиничні елементи "бічних сторін" трикутника, після чого використовують тотожність $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Трикутник Паскаля. Приклад

Приклад 4.9. Обчислимо перші п'ять рядків трикутника Паскаля (в "прямокутній" формі):

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 1+1=2 & 1 & & \\
1 & 1+2=3 & 2+1=3 & 1 & \\
1 & 1+3=4 & 3+3=6 & 3+1=4 & 1
\end{array}
$$

6. Застосування кореневих дерев в комбінаторних задачах

Застосування кореневих дерев

Багато комбінаторних проблем не можуть бути описані жодною з класичних комбінаторних моделей. В таких ситуаціях, коли практично єдиним методом є безпосередній перебір всіх варіантів, зручно користуватися графами спеціального виду — так званими кореневими деревами. Кореневе дерево визначається як дерево з виділеною вершиною — коренем (точні визначення будуть наведені далі в нашому курсі, при вивченні

Застосування кореневих дерев

графів спеціальних типів). При переборі варіантів кожній вершині дерева (починаючи з корня) відповідає певна група варіантів; якщо група варіантів розбивається на n множин, з відповідної вершини дерева виходить n ребер. Кожному листу ("заключним" вершинам дерева) відповідає достатньо проста множина варіантів (найчастіше кожному листу відповідає один варіант).

Застосування кореневих дерев. Приклад

Приклад 4.10. В деякому (абстрактному) казіно гра проходить за наступними правилами: при виграші гри гравець отримує виграш в розмірі ставки (тобто, поставивши k гривень, гравець в разі виграшу забере $2k$ гривень); при програшу гравець втрачає свою ставку.

Нехай дехто (абстрактний гравець) прийшов в казіно з однією гривнею і вирішив грати доти, доки в нього є гроші, але не більше трьох ігор, роблячи на кожну гру ставку в одну гривню.

Застосування кореневих дерев. Приклад

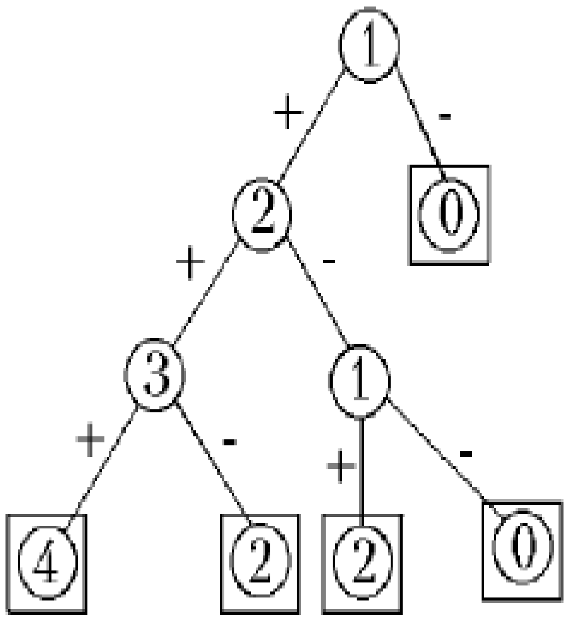

Рис. 4.1.

Розташуємо можливі варіанти розвитку подій у вигляді кореневого дерева (рисунок 4.1). Ребро, що помічене знаком +, відповідає виграшу в конкретній грі; ребро, що помічене знаком −, відповідає програшу, Кожну вершину дерева будемо помічати сумою (в гривнях), що залишилася у гравця на цей час. Листи дерева (варіанти закінчення серії ігор) будемо позначати зовнішнім квадратом. Як видно з рисунка 4.1, в трьох з п'яти варіантів закінчення серії гравець залишається з виграшем, і в двох гравець програє. Звичайно, звідси не випливає, що в середньому гравець буде вигравати, оскільки не всі варіанти закінчення мають однакову ймовірність.

Питання, які були розглянуті

1. Основні принципи комбінаторики. Загальне поняття виборки
2. Розміщення з повтореннями та без повторень
3. Комбінації з повтореннями та без повторень
4. Впорядковані розбиття
5. Біноміальні та поліноміальні формули
6. Застосування кореневих дерев в комбінаторних задачах