*4.7. ОПЕРАЦИИ СО СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

Если заданы два степенных ряда

$$U(z) = U_0 + U_1 z + U_2 z^2 + \cdots, \qquad V(z) = V_0 + V_1 z + V_2 z^2 + \cdots \tag{1}$$

с коэффициентами, принадлежащими некоторому полю, то можно образовывать их сумму, произведение и иногда их отношения, а также получать новые степенные ряды. Полиномы, очевидно, являются частным случаем степенных рядов, число членов которых конечно.

Безусловно, только конечное число членов можно представлять и хранить в компьютере. В таком случае уместно спросить: "Какая арифметика степенных рядов возможна на компьютерах, и, если возможна, чем она отличается от арифметики полиномов?". Ответ таков: "Мы работаем только с первыми N коэффициентами степенных рядов, где N — параметр, который, в принципе, может быть произвольно большим. Вместо обычной арифметики полиномов мы, по существу, используем арифметику по модулю z^N, что часто приводит к различным точкам зрения. К тому же отдельные операции наподобие "обращения" можно выполнять со степенными рядами, но не с полиномами, так как полиномы не замкнуты относительно этих операций".

Операции со степенными рядами находят много применений в численном анализе, но, возможно, наиболее важным является нахождение асимптотического разложения (как видно из раздела 1.2.11.3) или вычисление некоторых величин, определяемых производящими функциями. Именно последние, а не арифметика с плавающей точкой, делают их удобными для точного вычисления коэффициентов. Все алгоритмы данного раздела, кроме очевидных исключений, можно выполнять только с использованием рациональных операций. Таким образом, методы из раздела 4.5.1 можно будет применять для получения точных результатов, когда потребуется.

Вычисление $W(z) = U(z) \pm V(z)$, конечно, тривиально, поскольку $W_n = [z^n]\,W(z) = U_n \pm V_n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Так же легко вычислить коэффициенты $W(z) = U(z)V(z)$, воспользовавшись хорошо известным правилом свертки

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} U_k V_{n-k} = U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \cdots + U_n V_0. \tag{2}$$

Отношение $W(z) = U(z)/V(z)$, когда $V_0 \neq 0$, можно получить, если поменять местами U и W в (2). Таким образом, получим правило

$$\begin{aligned} W_n &= \left(U_n - \sum_{k=0}^{n-1} W_k V_{n-k}\right) \bigg/ V_0 \\ &= (U_n - W_0 V_n - W_1 V_{n-1} - \cdots - W_{n-1} V_1)/V_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Это рекуррентное соотношение для W_k позволяет легко последовательно вычислить W_0, W_1, W_2, ..., не вводя U_n и V_n до вычисления W_{n-1}. Алгоритм с такими свойствами, оперирующий степенными рядами, обычно называют *интерактивным* (*online*). С его помощью можно определить N коэффициентов $W_0, W_1, \ldots, W_{N-1}$, не зная заранее N. Значит, можно, в принципе, выполнять алгоритм, как угодно долго, и полностью вычислять степенные ряды. Можно также выполнять интерактивный алгоритм до тех пор, пока не будет соблюдено любое требуемое условие. (Противоположность “online” — “offline” (“автономный”).)

Если коэффициенты U_k и V_k — целые, а W_k — не целые, рекуррентное соотношение (3) включает вычисления с дробями. Этого можно избежать, если воспользоваться полностью целочисленным подходом, предложенным в упр. 2.

Рассмотрим операцию вычисления $W(z) = V(z)^\alpha$, где α — “произвольная” степень. Например, можно вычислить квадратный корень из $V(z)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ или найти $V(z)^{-10}$ либо даже $V(z)^\pi$. Если V_m — первый не равный нулю коэффициент $V(z)$, получаем

$$\begin{aligned} V(z) &= V_m z^m \bigl(1 + (V_{m+1}/V_m)z + (V_{m+2}/V_m)z^2 + \cdots\bigr), \\ V(z)^\alpha &= V_m^\alpha z^{\alpha m} \bigl(1 + (V_{m+1}/V_m)z + (V_{m+2}/V_m)z^2 + \cdots\bigr)^\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Это выражение будет степенным рядом тогда и только тогда, когда αm — неотрицательное целое число. Из (4) следует, что задачу вычисления произвольных степеней можно свести к случаю, когда $V_0 = 1$, т. е. к вычислению коэффициентов:

$$W(z) = (1 + V_1 z + V_2 z^2 + V_3 z^3 + \cdots)^\alpha. \tag{5}$$

Очевидно, что $W_0 = 1^\alpha = 1$.

Естественным методом нахождения коэффициентов выражения (5) является использование биномиальной теоремы 1.2.9–(19) или (если α — положительное целое число) методов из раздела 4.6.3. Но Леонард Эйлер открыл более простой и более эффективный метод получения степеней степенных рядов [*Introductio in Analysin Infinitorum* **1** (1748), §76]: если $W(z) = V(z)^\alpha$, то, дифференцируя, получим

$$W_1 + 2W_2 z + 3W_3 z^2 + \cdots = W'(z) = \alpha V(z)^{\alpha-1} V'(z); \tag{6}$$

следовательно,

$$W'(z)V(z) = \alpha W(z)V'(z). \tag{7}$$

Составив уравнение для коэффициентов при z^{n-1} в (7), получим, что

$$\sum_{k=0}^{n} k W_k V_{n-k} = \alpha \sum_{k=0}^{n} (n-k) W_k V_{n-k}, \tag{8}$$

а это дает удобное правило вычислений, справедливое для всех $n \ge 1$:

$$\begin{aligned} W_n &= \sum_{k=1}^{n} \biggl(\Bigl(\frac{\alpha+1}{n} \Bigr) k - 1 \biggr) V_k W_{n-k} \\ &= \bigl((\alpha+1-n) V_1 W_{n-1} + (2\alpha+2-n) V_2 W_{n-2} + \cdots + n\alpha V_n W_0 \bigr) / n. \end{aligned} \tag{9}$$

Из соотношения (9) можно получить простой интерактивный алгоритм для последовательного определения W_1, W_2, $\ldots$, используя приблизительно $2n$ умножений для вычисления n-го коэффициента. Отметим особый случай, когда $\alpha = -1$; (9) становится частным случаем (3) при $U(z) = V_0 = 1$.

Аналогичные методы можно использовать для образования $f(V(z))$, когда f — любая функция, удовлетворяющая простому дифференциальному уравнению (см., например, упр. 4). Для решения дифференциальных уравнений часто используется сравнительно прямой "метод степенных рядов". Он приводится почти во всех учебниках по дифференциальным уравнениям.

Обращение рядов. Возможно, наиболее интересным преобразованием степенных рядов является обращение рядов. Это преобразование позволяет решить уравнение

$$z = t + V_2t^2 + V_3t^3 + V_4t^4 + \cdots \tag{10}$$

относительно t, т. е. получить коэффициенты степенного ряда

$$t = z + W_2z^2 + W_3z^3 + W_4z^4 + \cdots. \tag{11}$$

Известны особо интересные способы выполнения такого обращения. Можно сказать, что "классический" метод основан на замечательной формуле обращения Лагранжа [*Mémoires Acad. Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* **24** (1768), 251–326], устанавливающей, что

$$W_n = \frac{1}{n}\,[t^{n-1}]\,(1 + V_2t + V_3t^2 + \cdots)^{-n}. \tag{12}$$

Например, имеем $(1-t)^{-5} = \binom{4}{4} + \binom{5}{4}t + \binom{6}{4}t^2 + \cdots$, тогда пятый коэффициент, W_5, обращения $z = t - t^2$ равен $\binom{8}{4}/5 = 14$. Это проверяется с помощью формулы перечисления бинарных деревьев, приведенной в разделе 2.3.4.4.

В соотношении (12), которое имеет простое алгоритмическое доказательство (см. упр. 16), показано, что можно обратить ряд (10), если последовательно вычислять отрицательные степени $(1 + V_2t + V_3t^2 + \cdots)^{-n}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Непосредственное применение этой идеи должно привести к интерактивному алгоритму обращения, который использует около $N^3/2$ умножений для вычисления N коэффициентов, но соотношение (9) предоставляет возможность работать только с первыми n коэффициентами $(1+V_2t+V_3t^2+\cdots)^{-n}$, получаемыми интерактивным алгоритмом, которому требуется лишь около $N^3/6$ умножений.

Алгоритм L (*Обращение степенного ряда методом Лагранжа*). В этом интерактивном алгоритме (рис. 17) вводится значение V_n из (10) и выводится значение W_n из (11) для $n = 2, 3, 4, \ldots, N$. (Нет необходимости заранее знать точное число N; алгоритм можно завершить в соответствии с любым критерием.)

L1. [Инициализация.] Присвоить $n \leftarrow 1$, $U_0 \leftarrow 1$. (Соотношение

$$(1 + V_2t + V_3t^2 + \cdots)^{-n} = U_0 + U_1t + \cdots + U_{n-1}t^{n-1} + O(t^n) \tag{13}$$

сохраняется на все время работы алгоритма.)

L2. [Ввод V_n.] Увеличить n на 1. Если $n > N$, работа алгоритма завершается, иначе — ввести следующий коэффициент V_n.

L3. [Деление.] Присвоить $U_k \leftarrow U_k - U_{k-1}V_2 - \cdots - U_1V_k - U_0V_{k+1}$ для $k = 1, 2, \ldots, n-2$ (в таком порядке); затем присвоить

$$U_{n-1} \leftarrow -2U_{n-2}V_2 - 3U_{n-3}V_3 - \cdots - (n-1)U_1V_{n-1} - nU_0V_n.$$

(В результате получаем $U(z)$, деленное на $V(z)/z$, см. (3) и (9).)

L4. [Вывод W_n.] Вывести U_{n-1}/n, которое равно W_n, и возвратиться к шагу L2. ▮

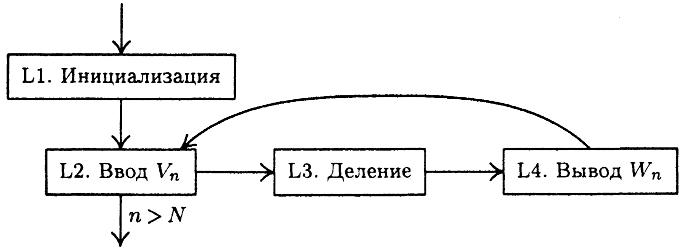

Рис. 17. Алгоритм L обращения степенного ряда.

Если алгоритм L применить к примеру $z = t - t^2$, можно вычислить следующее.

n	V_n	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	W_n
1	1	1					1
2	−1	1	2				1
3	0	1	3	6			2
4	0	1	4	10	20		5
5	0	1	5	15	35	70	14

В упр. 8 показано, что небольшая модификация алгоритма L позволит решать значительно более общие задачи, прилагая только чуть больше усилий.

Рассмотрим сейчас решение уравнения

$$U_1 z + U_2 z^2 + U_3 z^3 + \cdots = t + V_2 t^2 + V_3 t^3 + \cdots \tag{14}$$

относительно t и получим коэффициенты степенного ряда

$$t = W_1 z + W_2 z^2 + W_3 z^3 + W_4 z^4 + \cdots. \tag{15}$$

Уравнение (10) — это частный случай (14) при $U_1 = 1$, $U_2 = U_3 = \cdots = 0$. Если $U_1 \neq 0$, можно предположить, что $U_1 = 1$, заменив z на $(U_1 z)$, но мы рассмотрим общее уравнение (14), поскольку U_1 может равняться нулю.

Алгоритм T (*Обобщенное обращение степенных рядов*). В этом интерактивном алгоритме вводятся значения U_n и V_n из (14) и выводится значение W_n из (15) для $n = 1, 2, 3, \ldots, N$. При вычислениях используется вспомогательная матрица T_{mn}, $1 \leq m \leq n \leq N$.

T1. [Инициализация.] Присвоить $n \leftarrow 1$. Занесем два первых введенных значения (а именно — U_1 и V_1) в T_{11} и V_1 соответственно. (Должно выполняться равенство $V_1 = 1$.)

T2. [Вывод W_n.] Вывести значение T_{1n}, которое равно W_n.

T3. [Ввод U_n, V_n.] Увеличить n на 1. Если $n > N$, алгоритм заканчивает работу, иначе — запоминает два следующих введенных значения (а именно — U_n и V_n) в T_{1n} и V_n.

T4. [Умножение.] Присвоить

$$T_{mn} \leftarrow T_{11} T_{m-1,n-1} + T_{12} T_{m-1,n-2} + \cdots + T_{1,n-m+1} T_{m-1,m-1}$$

и $T_{1n} \leftarrow T_{1n} - V_m T_{mn}$ для $2 \le m \le n$. (После этого шага для $1 \le m \le n$ получим

$$t^m = T_{mm}z^m + T_{m,m+1}z^{m+1} + \cdots + T_{mn}z^n + O(z^{n+1}). \qquad (16)$$

Легко проверить (16) индукцией по $m \ge 2$ и, когда $m = 1$, получить $U_n = T_{1n} + V_2T_{2n} + \cdots + V_nT_{nn}$ согласно (14) и (16).) Возвратиться к шагу T2. ▌

Соотношение (16) объясняет механизм этого алгоритма, предложенного Генри К. Тэчером (мл.) (Henry C. Thacher, Jr.) [*CACM* **9** (1966), 10–11]. Время счета алгоритма, по существу, такое же, как и у алгоритма L, но требуется значительно больший объем памяти для хранения данных. Пример работы алгоритма приведен в упр. 9.

Другой подход к обращению степенных рядов предложен в работе R. P. Brent and H. T. Kung, *JACM* **25** (1978), 581–595. Он основан на том факте, что стандартные итерационные процедуры, которые используются для нахождения корней уравнений с действительными числами, можно также применять к уравнениям для степенных рядов. В частности, можно рассмотреть метод Ньютона для приближенного вычисления действительного числа t, такого, что $f(t) = 0$, а заданная функция f хорошо ведет себя в окрестности t: если x является хорошим приближением к t, то $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ будет даже лучшим приближением. Записав $x = t + \epsilon$, получим $f(x) = f(t) + \epsilon f'(t) + O(\epsilon^2)$, $f'(x) = f'(t) + O(\epsilon)$; следовательно, $\phi(x) = t + \epsilon - \bigl(0 + \epsilon f'(t) + O(\epsilon^2)\bigr)/\bigl(f'(t) + O(\epsilon)\bigr) = t + O(\epsilon^2)$. Применим эту идею к степенным рядам. Пусть $f(x) = V(x) - U(z)$, где U и V — степенные ряды из (14). Найдем степенной ряд t от z, такой, что $f(t) = 0$. Пусть $x = W_1z + \cdots + W_{n-1}z^{n-1} = t + O(z^n)$ — "приближение" к t порядка n, тогда $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ будет приближением порядка $2n$, поскольку для этих f и t выполняются предположения метода Ньютона.

Другими словами, можно воспользоваться следующей процедурой.

Алгоритм N (*Обобщенное обращение степенного ряда методом Ньютона*). Данный "полиинтерактивный" алгоритм вводит значения U_n и V_n согласно (14) для $2^k \le n < 2^{k+1}$ и выводит значения W_n согласно (15) для $2^k \le n < 2^{k+1}$, получая ответы группами по 2^k значений одновременно для $k = 0, 1, 2, \ldots, K$.

N1. [Инициализация.] Присвоить $N \leftarrow 1$. (Получим $N = 2^k$.) Ввести первые коэффициенты U_1 и V_1 ($V_1 = 1$) и присвоить $W_1 \leftarrow U_1$.

N2. [Вывод.] Вывести W_n для $N \le n < 2N$.

N3. [Ввод.] Присвоить $N \leftarrow 2N$. Если $N > 2^K$, алгоритм закончил работу, иначе — ввести значения U_n и V_n для $N \le n < 2N$.

N4. [Шаг Ньютона.] Воспользуемся алгоритмом для композиции степенных рядов (см. упр. 11), чтобы вычислить коэффициенты Q_j и R_j $(0 \le j < N)$ степенного ряда

$$\begin{aligned} U_1z + \cdots + U_{2N-1}z^{2N-1} - V(W_1z + \cdots + W_{N-1}z^{N-1}) \\ = R_0z^N + R_1z^{N+1} + \cdots + R_{N-1}z^{2N-1} + O(z^{2N}), \end{aligned}$$

$$V'(W_1z + \cdots + W_{N-1}z^{N-1}) = Q_0 + Q_1z + \cdots + Q_{N-1}z^{N-1} + O(z^N),$$

где $V(x) = x + V_2x^2 + \cdots$ и $V'(x) = 1 + 2V_2x + \cdots$. Затем возьмем $W_N, \ldots, W_{2N-1}$ в качестве коэффициентов степенного ряда

$$\frac{R_0+R_1z+\cdots+R_{N-1}z^{N-1}}{Q_0+Q_1z+\cdots+Q_{N-1}z^{N-1}} = W_N + \cdots + W_{2N-1}z^{N-1} + O(z^N)$$

и возвратимся к шагу N2. ▌

Время работы данного алгоритма при получении $N = 2^K$ коэффициентов равно $T(N)$, где

$$T(2N) = T(N) + (\text{время на выполнение шага N4}) + O(N). \tag{17}$$

Прямые алгоритмы для композиции и деления на шаге N4 имеют порядка N^3 шагов, значит, алгоритм N работает медленнее алгоритма T. Тем не менее Брент (Brent) и Кунг (Kung) нашли метод, которым требуемая композиция степенных рядов выполняется с помощью $O(N\log N)^{3/2}$ арифметических операций (в упр. 6 приведен алгоритм для деления, работающий еще быстрее). Таким образом, в (17) показано, что обращение степенных рядов можно выполнить только с помощью $O(N\log N)^{3/2}$ операций, когда $N \to \infty$. (С другой стороны, константа пропорциональности такова, что N должно быть действительно большим, прежде чем алгоритмы L и T перестанут относиться к "быстродействующим" методам.)

Историческая справка. Ж. Н. Брамхел (J. N. Bramhall) и М. А. Чаппл (M. A. Chapple) впервые опубликовали метод обращения степенных рядов, требующий $O(N^3)$ операций, в *CACM* 4 (1961), 317–318, 503. Это, по существу, автономный алгоритм, эквивалентный методу, который приведен в упр. 16, с таким же временем счета, как у алгоритмов L и T.

Итерация рядов. Чтобы изучить поведение итеративного процесса $x_n \leftarrow f(x_{n-1})$, следует изучить n-кратную композицию данной функции f саму с собой, т. е. $x_n = f\bigl(f(\ldots f(x_0)\ldots)\bigr)$. Определим $f^{[0]}(x) = x$ и $f^{[n]}(x) = f\bigl(f^{[n-1]}(x)\bigr)$ так, что

$$f^{[m+n]}(x) = f^{[m]}\bigl(f^{[n]}(x)\bigr) \tag{18}$$

для всех целых m, $n \geq 0$. Во многих случаях обозначение $f^{[n]}(x)$ имеет смысл и для отрицательных целых n. Если $f^{[n]}$ и $f^{[-n]}$ — взаимно обратные функции, а именно — $x = f^{[n]}\bigl(f^{[-n]}(x)\bigr)$, и если обратные функции определены единственным образом, то (18) справедливо для *всех* целых m и n. Обращение рядов — это, по существу, операция нахождения обратного степенного ряда $f^{[-1]}(x)$. Например, соотношения (10) и (11) устанавливают, что $z = V\bigl(W(z)\bigr)$ и $t = W\bigl(V(t)\bigr)$; таким образом, $W = V^{[-1]}$.

Предположим, что заданы два степенных ряда, $V(z) = z + V_2z^2 + \cdots$ и $W(z) = z + W_2z^2 + \cdots$, таких, что $W = V^{[-1]}$. Пусть u — любая не равная нулю постоянная. Рассмотрим функцию

$$U(z) = W\bigl(uV(z)\bigr). \tag{19}$$

Легко видеть, что $U\bigl(U(z)\bigr) = W\bigl(u^2V(z)\bigr)$ и вообще

$$U^{[n]}(z) = W\bigl(u^nV(z)\bigr) \tag{20}$$

для всех целых n. Следовательно, имеем простое выражение для n-й итерации $U^{[n]}$, которую можно вычислить приблизительно с одинаковыми затратами труда для всех n. Кроме того, можно даже воспользоваться (20), чтобы определить $U^{[n]}$ для нецелых значений n. Например, "полуитерация" $U^{[1/2]}$ — это такая функция, что $U^{[1/2]}(U^{[1/2]}(z)) = U(z)$. (Существуют две такие функции $U^{[1/2]}$, полученные в результате использования $\sqrt{u}$ и $-\sqrt{u}$ в качестве значения $u^{1/2}$ в (20).)

Мы получили простые соотношения в (20), которые, начиная с V и u, определяют U. Но на практике обычно применяется другой метод: начиная с некоторой заданной функции U, найти такие V и u, чтобы выполнялось (19), т. е. чтобы

$$V(U(z)) = u\,V(z). \tag{21}$$

Такая функция V называется *функцией Шрёдера* U, поскольку она была введена Эрнстом Шрёдером (Ernst Schröder, *Math. Annalen* **3** (1871), 296–322). Рассмотрим задачу нахождения функции Шрёдера $V(z) = z + V_2z^2 + \cdots$ заданного степенного ряда $U = U_1z + U_2z^2 + \cdots$. Очевидно, что $u = U_1$, если выполняется (21).

Подставив в (21) $u = U_1$ и собрав коэффициенты при z, придем к последовательности уравнений, начинающихся с

$$\begin{aligned} U_1^2V_2 + U_2 &= U_1V_2 \\ U_1^3V_3 + 2U_1U_2V_2 + U_3 &= U_1V_3 \\ U_1^4V_4 + 3U_1^2U_2V_3 + 2U_1U_3V_2 + U_2^2V_2 + U_4 &= U_1V_4 \end{aligned}$$

и т. д. Ясно, что не существует решения, когда $U_1 = 0$ (кроме тривиального случая, когда $U_2 = U_3 = \cdots = 0$), но существует единственное решение, если U_1 не является корнем из единицы. Можно предположить, что произойдет что-нибудь забавное, когда $U_1^n = 1$, так как из (20) видно, что $U^{[n]}(z) = z$, если функция Шрёдера в этом случае существует. Предположим на минуту, что U_1 не равно нулю и не равно корню из единицы. Тогда функция Шрёдера существует и возникает следующий вопрос: "Как ее вычислить, не прилагая слишком много усилий?".

Следующая процедура предложена Р. П. Брентом (R. P. Brent) и Ж. Ф. Траубом (J. F. Traub). Уравнение (21) приводит к подобной подзадаче, но более сложного вида. Таким образом, мы поставили более общую задачу, подзадача которой имеет такой же вид. Попытаемся найти $V(z) = V_0 + V_1z + \cdots + V_{n-1}z^{n-1}$, такое, что

$$V(U(z)) = W(z)V(z) + S(z) + O(z^n), \tag{22}$$

где $U(z)$, $W(z)$, $S(z)$ и n заданы, n — степень двойки и $U(0) = 0$. Для $n = 1$ просто положим $V_0 = S(0)/(1 - W(0))$ с $V_0 = 1$, если $S(0) = 0$ и $W(0) = 1$. Кроме того, возможен переход от n к $2n$: сначала найдем $R(z)$, такое, что

$$V(U(z)) = W(z)V(z) + S(z) - z^nR(z) + O(z^{2n}), \tag{23}$$

затем вычислим

$$\hat{W}(z) = W(z)\big(z/U(z)\big)^n + O(z^n), \qquad \hat{S}(z) = R(z)\big(z/U(z)\big)^n + O(z^n) \tag{24}$$

и найдем $\hat{V}(z) = V_n + V_{n+1}z + \cdots + V_{2n-1}z^{n-1}$, такое, что

$$\hat{V}(U(z)) = \hat{W}(z)\hat{V}(z) + \hat{S}(z) + O(z^n). \tag{25}$$

Следовательно, функция $V^*(z) = V(z) + z^n\hat{V}(z)$ удовлетворяет

$$V^*(U(z)) = W(z)V^*(z) + S(z) + O(z^{2n}),$$

что и требовалось.

Время работы данной процедуры $T(n)$ удовлетворяет соотношению

$$T(2n) = 2T(n) + C(n), \tag{26}$$

где $C(n)$ — время вычисления $R(z)$, $\hat{W}(z)$ и $\hat{S}(z)$. Функция $C(n)$ отнимает основное время при вычислении $V\bigl(U(z)\bigr)$ по модулю z^{2n}, порядок роста $C(n)$ предположительно больше, чем $n^{1+\epsilon}$; следовательно, решение $T(n)$ рекуррентного соотношения (26) будет иметь порядок $C(n)$. Например, если $C(n) = cn^3$, получим $T(n) \approx \frac{4}{3}cn^3$ или, если $C(n)$ равно $O(n \log n)^{3/2}$, с помощью "быстрой" композиции получим $T(n) = O(n \log n)^{3/2}$.

Процедура не работает, когда $W(0) = 1$ и $S(0) \neq 0$, поэтому необходимо исследовать, когда это происходит. Легко доказать индукцией по n, что решение (22) согласно методу Брента-Трауба влечет рассмотрение точно n подзадач, в которых коэффициенты $V(z)$ правой части уравнения принимают соответствующие значения $W(z)\bigl(z/U(z)\bigr)^j + O(z^n)$ для $0 \le j < n$ в некотором порядке. Если $W(0) = U_1$ и U_1 — не корень из единицы, получаем $W(0) = 1$ только тогда, когда $j = 1$; в этом случае процедура не работает, если (22) не имеет решения для $n = 2$.

Следовательно, функцию Шрёдера для U можно найти, решая уравнение (22) для $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$ с $W(z) = U_1$ и $S(z) = 0$, всякий раз, когда U_1 не равно нулю и не является корнем из единицы.

Если $U_1 = 1$, функция Шрёдера не существует, кроме случая, когда $U(z) = z$. Однако Брент и Трауб сумели найти быстрый метод вычисления $U^{[n]}(z)$, даже когда $U_1 = 1$, благодаря использованию функции $V(z)$, такой, что

$$V\bigl(U(z)\bigr) = U'(z)V(z). \tag{27}$$

Если обе функции $U(z)$ и $\hat{U}(z)$ удовлетворяют (27) для тех же V, легко проверить, что их композиция $U\bigl(\hat{U}(z)\bigr)$ также удовлетворяет (27); следовательно, все итерации $U(z)$ являются решениями (27). Предположим, выполняется равенство $U(z) = z + U_k z^k + U_{k+1} z^{k+1} + \cdots$, где $k \ge 2$ и $U_k \neq 0$. Тогда можно показать, что существует единственный степенной ряд вида $V(z) = z^k + V_{k+1} z^{k+1} + V_{k+2} z^{k+2} + \cdots$, который удовлетворяет (27). Значит, если задана такая функция $V(z)$ и если заданы $k \ge 2$ и U_k, существует единственный ряд вида $U(z) = z + U_k z^k + U_{k+1} z^{k+1} + \cdots$, удовлетворяющий (27). Требуемая итерация $U^{[n]}(z)$ является единственным степенным рядом $P(z)$, удовлетворяющим

$$V\bigl(P(z)\bigr) = P'(z)V(z), \tag{28}$$

где $P(z) = z + nU_k z^k + \cdots$. Обе функции, $V(z)$ и $P(z)$, можно найти с помощью подходящих алгоритмов (см. упр. 14).

Если U_1 — k-й корень из единицы, не равный 1, то такой же метод можно применить к функции $U^{[k]}(z) = z + \cdots$ и $U^{[k]}(z)$ можно найти из $U(z)$, произведя $l(k)$ операций композиции (см. раздел 4.6.3). Можно также рассмотреть случай, когда $U_1 = 0$: если $U(z) = U_k z^k + U_{k+1} z^{k+1} + \cdots$, где $k \ge 2$ и $U_k \neq 0$, то идея состоит в том, чтобы найти решение уравнения $V\bigl(U(z)\bigr) = U_k V(z)^k$. Тогда

$$U^{[n]}(z) = V^{[-1]}\bigl(U_k^{[(k^n-1)/(k-1)]} V(z)^{k^n}\bigr). \tag{29}$$

И наконец, если $U(z) = U_0 + U_1 z + \cdots$, где $U_0 \neq 0$, пусть α — "неподвижная точка", такая, что $U(\alpha) = \alpha$, и пусть

$$\hat{U}(z) = U(\alpha + z) - \alpha = zU'(\alpha) + z^2 U''(\alpha)/2! + \cdots. \tag{30}$$

Тогда $U^{[n]}(z) = \hat{U}^{[n]}(z - \alpha) + \alpha$. Детали можно найти в работе Brent and Traub, *SICOMP* **9** (1980), 54–66. Функция V из (27), по существу, рассмотрена в книге M. Kuczma, *Functional Equations in a Single Variable* (Warsaw: PWN-Polish Scientific, 1968), лемма 9.4, и, безусловно, Э. Жаботинским (E. Jabotinsky) на несколько лет раньше (см. упр. 23).

Алгебраические функции. Коэффициенты каждого степенного ряда $W(z)$, удовлетворяющего общему уравнению вида

$$A_n(z)W(z)^n + \cdots + A_1(z)W(z) + A_0(z) = 0, \tag{31}$$

где каждое $A_i(z)$ — полином, можно эффективно вычислить методом, предложенным в работе H. T. Kung and J. F. Traub, *JACM* **25** (1978), 245–260. См. также работу Д. В. Чудновского и Г. В. Чудновского (D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky, *J. Complexity* **2** (1986), 271–294; **3** (1987), 1–25).

УПРАЖНЕНИЯ

1. [*M10*] В разделе объяснено, как разделить $U(z)$ на $V(z)$, когда $V_0 \neq 0$. Как произвести деление, когда $V_0 = 0$?

2. [*20*] Когда коэффициенты $U(z)$ и $V(z)$ — целые и $V_0 \neq 0$, найдите рекуррентное соотношение для целых $V_0^{n+1} W_n$, где W_n определено в (3). Как можно этим воспользоваться для деления степенных рядов?

3. [*M15*] Будет ли правильным результат, приведенный в формуле (9), когда $\alpha = 0$ и когда $\alpha = 1$?

▶ **4.** [*HM23*] Покажите, что простая модификация (9) может быть использована для вычисления $e^{V(z)}$, когда $V_0 = 0$, и $\ln V(z)$, когда $V_0 = 1$.

5. [*M00*] Что произойдет, если степенной ряд обратить дважды, т. е. если выходные значения алгоритма L или T обратить снова?

▶ **6.** [*M21*] (Х. Т. Кунг (H. T. Kung).) Примените метод Ньютона к вычислению $W(z) = 1/V(z)$, когда $V(0) \neq 0$, определив корень в виде степенного ряда уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = x^{-1} - V(z)$.

7. [*M23*] Воспользовавшись формулой обращения Лагранжа (12), найдите простое выражение для коэффициента W_n в обращении $z = t - t^m$.

▶ **8.** [*M25*] Для $W(z) = W_1 z + W_2 z^2 + W_3 z^3 + \cdots = G_1 t + G_2 t^2 + G_3 t^3 + \cdots = G(t)$, где $z = V_1 t + V_2 t^2 + V_3 t^3 + \cdots$ и $V_1 \neq 0$, Лагранж доказал, что

$$W_n = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\, G'(t)/(V_1 + V_2 t + V_3 t^2 + \cdots)^n .$$

(Соотношение (12) является частным случаем предыдущего, когда $G_1 = V_1 = 1$, $G_2 = G_3 = \cdots = 0$.) Расширьте алгоритм L таким образом, чтобы для данной более общей ситуации он вычислял коэффициенты $W_1, W_2, \ldots$ без значительного увеличения времени работы алгоритма.

9. [*11*] Используя алгоритм T, найдите значения T_{mn} как первые пять коэффициентов обращения $z = t - t^2$.

10. [*M20*] Задано $y = x^\alpha + a_1 x^{\alpha+1} + a_2 x^{\alpha+2} + \cdots$, $\alpha \neq 0$. Покажите, как вычислить коэффициенты в разложении $x = y^{1/\alpha} + b_2 y^{2/\alpha} + b_3 y^{3/\alpha} + \cdots$.

▶ **11.** [*M25*] (*Композиция степенных рядов.*) Пусть

$$U(z) = U_0 + U_1 z + U_2 z^2 + \cdots \quad \text{и} \quad V(z) = V_1 z + V_2 z^2 + V_3 z^3 + \cdots.$$

Составьте план алгоритма, который вычисляет первые N коэффициентов $U(V(z))$.

12. [*M20*] Найдите связь между делением полиномов и делением степенных рядов. Заданы полиномы $u(x)$ и $v(x)$ степеней m и n соответственно над полем. Покажите, как найти полиномы $q(x)$ и $r(x)$, такие, что $u(x) = q(x)v(x) + r(x)$ и $\deg(r) < n$, используя только операции со степенными рядами.

13. [*M27*] (*Аппроксимация рациональных функций.*) Иногда необходимо найти полиномы, отношения которых имеют такие же начальные члены, как и данные степенные ряды. Например, если $W(z) = 1 + z + 3z^2 + 7z^3 + \cdots$, то существует четыре различных способа представления $W(z)$ в виде $w_1(z)/w_2(z) + O(z^4)$, где $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — полиномы с $\deg(w_1) + \deg(w_2) < 4$:

$$\begin{aligned}
(1 + z + 3z^2 + 7z^3)\,/\,1 &= 1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 0z^4 + \cdots,\\
(3 - 4z + 2z^2)\,/\,(3 - 7z) &= 1 + z + 3z^2 + 7z^3 + \tfrac{49}{3}z^4 + \cdots,\\
(1 - z)\,/\,(1 - 2z - z^2) &= 1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 17z^4 + \cdots,\\
1\,/\,(1 - z - 2z^2 - 2z^3) &= 1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 15z^4 + \cdots.
\end{aligned}$$

Рациональные функции такого рода обычно называют *аппроксимацией Паде*, так как они широко изучены Г. Е. Паде (H. E. Padé) [*Annales Scient. de l'École Normale Supérieure* (3) **9** (1892), S1–S93; (3) **16** (1899), 395–426].

Покажите, что все аппроксимации Паде $W(z) = w_1(z)/w_2(z) + O(z^N)$ с $\deg(w_1) + \deg(w_2) < N$ можно получить, применяя обобщенный алгоритм Евклида к полиномам z^N и $W_0 + W_1 z + \cdots + W_{N-1} z^{N-1}$, и составьте целочисленный алгоритм для случая, когда каждое W_i — целое. [*Указание*. См. упр. 4.6.1–26.]

▶ **14.** [*HM30*] Используя (27) и (28), запишите подробно метод вычисления $U^{[n]}(z)$ Брента и Трауба, когда $U(z) = z + U_k z^k + \cdots$.

15. [*HM20*] Какой вид должна иметь функция $U(z)$, если в (27) $V(z)$ имеет простую форму z^k? Какой вывод можно сделать относительно итераций $U(z)$?

16. [*HM21*] Пусть, как в упр 8, $W(z) = G(t)$. "Очевидный" метод нахождения коэффициентов $W_1, W_2, W_3, \ldots$ таков: присвоить $n \leftarrow 1$ и $R_1(t) \leftarrow G(t)$, а затем сохранить соотношение $W_n V(t) + W_{n+1} V(t)^2 + \cdots = R_n(t)$, неоднократно присваивая $W_n \leftarrow [t]\, R_n(t)/V_1$, $R_{n+1}(t) \leftarrow R_n(t)/V(t) - W_n$, $n \leftarrow n + 1$.

Докажите формулу Лагранжа из упр. 8, показав, что

$$\frac{1}{n}[t^{n-1}]\, R'_{k+1}(t)\, t^n/V(t)^n = \frac{1}{n+1}[t^n]\, R'_k(t)\, t^{n+1}/V(t)^{n+1} \quad \text{для всех } n \geq 1 \text{ и } k \geq 1.$$

▶ **17.** [*M20*] Задан степенной ряд $V(z) = V_1 z + V_2 z^2 + V_3 z^3 + \cdots$. Определим *степенную матрицу* V как бесконечную таблицу коэффициентов $v_{nk} = \frac{n!}{k!}[z^n]V(z)^k$; n-й *степеноид* (*poweroid*) V определяется как $V_n(x) = v_{n0} + v_{n1}x + \cdots + v_{nn}x^n$. Докажите, что степеноид удовлетворяет общему закону свертки

$$V_n(x + y) = \sum_k \binom{n}{k} V_k(x) V_{n-k}(y)\,.$$

(Например, когда $V(z) = z$, получаем $V_n(x) = x^n$, и это биномиальная теорема. Когда $V(z) = \ln(1/(1 - z))$, согласно 1.2.9–(26) получаем $v_{nk} = \left[{n \atop k}\right]$. Следовательно, степеноид

$V_n(x)$ равен $x^{\overline{n}}$, и тождество совпадает с результатом, доказанным в упр. 1.2.6–33. Когда $V(z) = e^z - 1$, получаем $V_n(x) = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^k$ и данная формула эквивалентна равенству

$$\binom{l+m}{m}\left\{ {n \atop l+m} \right\} = \sum_k \binom{n}{k}\left\{ {k \atop l} \right\}\left\{ {n-k \atop m} \right\},$$

которого ранее у нас не было. Другие треугольные таблицы коэффициентов, которые возникают в комбинаторной математике и анализе алгоритмов, также оказываются степенными матрицами степенных рядов.)

18. [*HM22*] Продолжая упр. 17, докажите, что степеноид также удовлетворяет уравнению

$$xV_n(x+y) = (x+y)\sum_k \binom{n-1}{k-1} V_k(x)V_{n-k}(y).$$

[*Указание.* Рассмотрите производную $e^{xV(z)}$.]

19. [*M25*] Продолжая упр. 17, выразите все числа v_{nk} в терминах чисел $v_n = v_{n1} = n!\,V_n$ первого столбца и найдите простую рекуррентную формулу, которая позволит получить все столбцы из последовательности v_1, v_2, $\ldots$. В частности, покажите, что если все v_n — целые, то все v_{nk} также целые.

20. [*HM20*] Продолжая упр. 17, предположим, что $W(z) = U(V(z))$ и $U_0 = 0$. Докажите, что степенная матрица W равна произведению степенных матриц V и U: $w_{nk} = \sum_j v_{nj}u_{jk}$.

▸ **21.** [*HM27*] Продолжая предыдущее упражнение, предположим, что $V_1 \neq 0$, и пусть $W(z) = -V^{[-1]}(-z)$. Назначение данного упражнения — показать, что степенные матрицы V и W "двойственны" одна другой; например, когда $V(z) = \ln(1/(1-z))$, то $V^{[-1]}(z) = 1 - e^{-z}$, $W(z) = e^z - 1$ и соответствующие степенные матрицы — это хорошо известные треугольники Стирлинга $v_{nk} = \left[{n \atop k} \right]$ и $w_{nk} = \left\{ {n \atop k} \right\}$.

a) Докажите, что формула обращения 1.2.6–(47) для чисел Стирлинга обычно выполняется в более общем случае:

$$\sum_k v_{nk}w_{km}(-1)^{n-k} = \sum_k w_{nk}v_{km}(-1)^{n-k} = \delta_{mn}.$$

b) Из соотношения $v_{n(n-k)} = n^{\underline{k}}\,[z^k]\,(V(z)/z)^{n-k}$ для фиксированных k следует, что величина $v_{n(n-k)}/V_1^n$ является полиномом от n степени $\leq 2k$. Поэтому можно определить

$$v_{\alpha(\alpha-k)} = \alpha^{\underline{k}}\,[z^k]\,(V(z)/z)^{\alpha-k}$$

для произвольного α, когда k — неотрицательное целое число, как было определено для чисел Стирлинга в разделе 1.2.6. Докажите, что $v_{(-k)(-n)} = w_{nk}$. (Это обобщение формулы 1.2.6–(58).)

▸ **22.** [*HM27*] Задан ряд $U(z) = U_0 + U_1 z + U_2 z^2 + \cdots$ с $U_0 \neq 0$; *α-индуцированная функция* $U^{\{\alpha\}}(z)$ — это степенной ряд $V(z)$, полностью определенный уравнением

$$V(z) = U(zV(z)^\alpha).$$

a) Докажите, что $U^{\{0\}}(z) = U(z)$ и $U^{\{\alpha\}\{\beta\}}(z) = U^{\{\alpha+\beta\}}(z)$.

b) Пусть $B(z)$ — простой биномиальный ряд $1 + z$. Где раньше встречалось $B^{\{2\}}(z)$?

c) Докажите, что $[z^n]\,U^{\{\alpha\}}(z)^x = \frac{x}{x+n\alpha}\,[z^n]\,U(z)^{x+n\alpha}$. *Указание.* Если $W(z) = z/U(z)^\alpha$, то получим $U^{\{\alpha\}}(z) = (W^{[-1]}(z)/z)^{1/\alpha}$.

d) Докажите, следовательно, что любой степеноид $V_n(x)$ удовлетворяет не только равенствам из упр. 17 и 18, но и равенствам

$$\frac{(x+y)V_n(x+y+n\alpha)}{x+y+n\alpha} = \sum_k \binom{n}{k} \frac{xV_k(x+k\alpha)}{x+k\alpha} \frac{yV_{n-k}(y+(n-k)\alpha)}{y+(n-k)\alpha};$$

$$\frac{V_n(x+y)}{y-n\alpha} = (x+y)\sum_k \binom{n-1}{k-1} \frac{V_k(x+k\alpha)}{x+k\alpha} \frac{V_{n-k}(y-k\alpha)}{y-k\alpha}.$$

[Частные случаи включают биномиальную теорему Абеля, формулу 1.2.6–(16) и равенства Рота 1.2.6–(26) и 1.2.6–(30): сумму Торелли, упр. 1.2.6–34.]

23. [*HM35*] (Э. Жаботинский.) Продолжая в том же духе, предположим, что $U = (u_{nk})$ — степенная матрица $U(z) = z + U_2 z^2 + \cdots$. Пусть $u_n = u_{n1} = n!\,U_n$.

a) Объясните, как вычислить матрицу $\ln U$, чтобы степенная матрица $U^{[\alpha]}(z)$ равнялась $\exp(\alpha \ln U) = I + \alpha \ln U + (\alpha \ln U)^2/2! + \cdots$.

b) Пусть l_{nk} — элемент матрицы $\ln U$, находящийся на пересечении строки n и столбца k, и пусть

$$l_n = l_{n1}, \qquad L(z) = l_2 \frac{z^2}{2!} + l_3 \frac{z^3}{3!} + l_4 \frac{z^4}{4!} + \cdots.$$

Докажите, что $l_{nk} = \binom{n}{k-1} l_{n+1-k}$ для $1 \le k \le n$. [*Указание.* $U^{[\epsilon]}(z) = z + \epsilon L(z) + O(\epsilon^2)$.]

c) Рассмотрите $U^{[\alpha]}(z)$ как функцию от α и z и докажите, что

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} U^{[\alpha]}(z) = L(z) \frac{\partial}{\partial z} U^{[\alpha]}(z) = L(U^{[\alpha]}(z)).$$

(Следовательно, $L(z) = (l_k/k!)V(z)$, где $V(z)$ — функция в (27) и (28).)

d) Покажите, что, если $u_2 \ne 0$, числа l_n можно вычислить по рекуррентной формуле

$$l_2 = u_2, \qquad \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} l_k u_{n+1-k} = \sum_{k=2}^{n} l_k u_{nk}.$$

Как следует использовать данную рекуррентную формулу, когда $u_2 = 0$?

e) Докажите равенство

$$u_n = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m = n+m-1 \\ k_1,\ldots,k_m \ge 2}} \frac{n_0}{k_1!} \frac{n_1}{k_2!} \cdots \frac{n_{m-1}}{k_m!} l_{k_1} l_{k_2} \ldots l_{k_m},$$

где $n_j = 1 + k_1 + \cdots + k_j - j$.

24. [*HM25*] Задан степенной ряд $U(z) = U_1 z + U_2 z^2 + \cdots$, где U_1 не равно корню из единицы. Пусть $U = (u_{nk})$ — степенная матрица $U(z)$.

a) Объясните, как вычислить матрицу $\ln U$ таким образом, чтобы степенная матрица $U^{[\alpha]}(z)$ равнялась $\exp(\alpha \ln U) = I + \alpha \ln U + (\alpha \ln U)^2/2! + \cdots$.

b) Покажите, что если $W(z)$ тождественно не равно нулю и если $U(W(z)) = W(U(z))$, то $W(z) = U^{[\alpha]}(z)$ для некоторого комплексного числа α.

25. [*M24*] При $U(z) = z + U_k z^k + U_{k+1} z^{k+1} + \cdots$ и $V(z) = z + V_l z^l + V_{l+1} z^{l+1} + \cdots$, где $k \ge 2$, $l \ge 2$, $U_k \ne 0$, $V_l \ne 0$ и $U(V(z)) = V(U(z))$, докажите, что $k = l$ и $V(z) = U^{[\alpha]}(z)$ для $\alpha = V_k/U_k$.

26. [*M22*] Покажите, что, если $U(z) = U_0 + U_1 z + U_2 z^2 \cdots$ и $V(z) = V_1 z + V_2 z^2 + \cdots$ — степенные ряды, все коэффициенты которых равны либо 0, либо 1, можно получить первые N коэффициентов $U(V(z))$ по модулю 2 за $O(N^{1+\epsilon})$ шагов для любого $\epsilon > 0$.

27. [*M22*] (Д. Зейлбергер (D. Zeilberger).) Найдите рекуррентную формулу, аналогичную (9), для вычисления коэффициентов $W(z) = V(z)V(qz)\ldots V(q^{m-1}z)$ при заданных q и m и коэффициентов $V(z) = 1 + V_1z + V_2z^2 + \cdots$. Предполагается, что q не равно корню из единицы.

▸ **28.** [*HM26*] *Ряд Дирихле* — это сумма вида $V(z) = V_1/1^z + V_2/2^z + V_3/3^z + \cdots$; произведение $U(z)V(z)$ двух таких рядов — это ряд Дирихле $W(z)$, у которого

$$W_n = \sum_{d\backslash n} U_d V_{n/d}\,.$$

Обычные степенные ряды — частный случай рядов Дирихле, так как $V_0 + V_1z + V_2z^2 + V_3z^3 + \cdots = V_0/1^s + V_1/2^s + V_2/4^s + V_3/8^s + \cdots$, когда $z = 2^{-s}$. На самом деле ряды Дирихле эквивалентны степенным рядам вида $V(z_1, z_2, \ldots)$ с произвольным множеством переменных, где $z_k = p_k^{-s}$ и p_k — k-е простое число.

Найдите рекуррентное соотношение, с помощью которого можно обобщить (9) и формулу из упр. 4, если предположить, что задан ряд Дирихле $V(z)$ и что нужно вычислить (a) $W(z) = V(z)^\alpha$, когда $V_1 = 1$; (b) $W(z) = \exp V(z)$, когда $V_1 = 0$; (c) $W(z) = \ln V(z)$, когда $V_1 = 1$. [*Указание.* Пусть $t(n)$ — общее число простых множителей n, включая кратные, и пусть $\delta \sum_n V_n/n^z = \sum_n t(n)V_n/n^z$. Покажите, что операция δ — аналогична производной, например $\delta e^{V(z)} = e^{V(z)}\delta V(z)$.]

"Это, безусловно, мысль, — с некоторым интересом произнес Пуаро. — Да, да, я играю роль компьютера, который питается информацией."

"И, предположим, вы получаете все неправильные ответы", — сказала миссис Оливер.

"Это невозможно, — возразил Эркюль Пуаро. — Компьютеры всего лишь сортируют факты."

"Это не предполагается, — сказала миссис Оливер, — но следует удивляться вещам, которые иногда происходят."

— АГАТА КРИСТИ (AGATHA CHRISTIE), *Прием в честь дня всех святых* (1969)

Кажется невозможным, что некоторый факт становится реальным после ряда фактов без той власти, которая впервые их создала.

— ЭДВАРД СТИЛЛИНГФЛИТ (EDWARD STILLINGFLEET), *Начала таинства*, 2:3:2 (1662)