

## От издателей русского перевода

На мировом рынке компьютерной литературы существует множество книг, предназначенных для обучения основным алгоритмам и используемых при программировании. Их довольно много, и они в значительной степени конкурируют между собой. Однако среди них есть особая книга. Это трехтомник “Искусство программирования” Д. Э. Кнута, который стоит вне всякой конкуренции, входит в золотой фонд мировой литературы по информатике и является настольной книгой практически для всех, кто связан с программированием.

Мы как издатели видим ценность книги в том, что она предназначена не столько для обучения технике программирования, сколько для обучения, если это возможно, “искусству” программирования, предлагает массу рецептов усовершенствования программ и, что самое главное, учит самостоятельно находить эти рецепты.

Ни для кого не секрет, что наши программисты являются одними из наиболее высококвалифицированных специалистов в мире. Они достойно представляют за рубежом отечественную школу программирования и информатики, которая внесла значительный вклад в формирование фундаментальных основ компьютерных наук. Для сохранения такого уровня и продвижения вперед необходимо своевременное издание на русском языке книг, отражающих основные мировые достижения в этой области. Трехтомник “Искусство программирования” Д. Э. Кнута — одна из таких книг.

Мы гордимся тем, что библиотеки программистов, преподавателей, студентов, старшеклассников и многих других пополнятся этой классической книгой и что тем самым мы внесем свой вклад в формирование более глубокого понимания основ компьютерных наук. Мы глубоко убеждены, что книга “Искусство программирования” Д. Э. Кнута способна приблизить человека к совершенству. Надеемся, наше издание на русском языке этой замечательной книги еще раз подтвердит, что истинные ценности с годами не устаревают.

— Виктор Штонда, Геннадий Петриковец, Алексей Орлович,  
издатели

## О книге “Искусство программирования”

У каждой книги своя судьба. Одни появляются незаметно и так же незаметно исчезают в потоке времени, покрываясь пылью на полках библиотек. Другие в определенный период пользуются спросом у узкого круга специалистов, пока им на смену не приходят новые справочники. Третьи, поднимаясь над временем, оказывают мощное влияние на технологическое развитие общества. Книг, относящихся к последней категории, не так уж и много. Их выход в свет — всегда праздник. Проходят годы, изменяются технологии, но новые поколения с постоянным интересом перечитывают их страницы. Именно к таким книгам относится предлагаемый читателю многотомный труд известного американского ученого Дональда Эрвина Кнута “Искусство программирования”.

Прошло почти 30 лет со времени первого издания в 1972 году в США этой книги. Она была переведена на большинство языков мира, в том числе и на русский. К настоящему времени на территории стран СНГ трехтомник Д. Э. Кнута стал библиографической редкостью. В 1998 году в США вышло третье издание “Искусства программирования”. В нем сохранена последовательность изложения материала прежних версий, но значительно расширен список ссылок, в который включены свежие и наиболее важные результаты, добавлены новые упражнения и комментарии, устранены неточности. Учитывая популярность во всем мире “Искусства программирования”, давно следовало ожидать появления нового переводного издания на русском языке, которое вы и держите в руках.

В чем же успех “Искусства программирования” Д. Э. Кнута?

Во-первых, эта книга — великолепное учебное пособие по составлению и анализу компьютерных алгоритмов. Ее разделы могут быть включены во многие университетские курсы по технологиям программирования, теории алгоритмов, дискретной математике. Книгу могут изучать и школьники старших классов, знакомые с основами программирования. В качестве основного языка записи алгоритмов автор выбрал язык машинных команд гипотетического универсального компьютера MIX. Это позволяет строить оптимальные программы с учетом особенностей вычислительных машин. Перенести MIX-программы на реальные ЭВМ или переписать их на языках высокого уровня не составляет особого труда. Логика работы программ почти всегда поясняется простыми блок-схемами.

Во-вторых, тщательно подобранный материал, вошедший в книгу, включает в себя основные фундаментальные классы алгоритмов, которые в том или ином виде наиболее часто встречаются в практике программирования.

В-третьих, немаловажным фактором успеха книги Д. Э. Кнута является энциклопедичность изложения. Профессор Кнут отличается уникальной способностью отслеживать проблему от исторических предпосылок ее зарождения до современного состояния. Многочисленные ссылки на работы старых мастеров (вплоть до времен античности), заключенные в современный контекст, создают у читателя особое чувство причастности к историческому развитию научных идей и методов.

В-четвертых, следует отметить мастерство изложения. Книга рассчитана на широкий круг читателей — от начинающих студентов до программистов-профессионалов. Каждому будет интересно изучать компьютерные алгоритмы на своем уровне. Материал

самодостаточен. Для понимания сути методов не требуется знания особых разделов математики или специальных технологий программирования. Прослеживается определенная “музыкальная” композиция сюжетного построения (дома у Д. Э. Кнута есть небольшой орган, на котором он играет).

Список составляющих успеха “Искусства программирования” можно легко продолжить.

Автор этих строк прослушал курс “Искусство программирования” в изложении профессора Кнута в 1976–1977 годах во время стажировки в Станфордском университете. Тогда формировалась алгоритмическая основа технологий программирования, у истоков которой стоял Д. Э. Кнут. Было много обсуждений, семинаров, творческих замыслов.

Значительные книги всегда связаны с судьбой автора. Дональд Эрвин Кнут начал работу над “Искусством программирования” в 1962 году. Продолжает ее и сейчас. У него много планов. Впереди новые тома “Искусства программирования”, которых с нетерпением ждут читатели.

— *Профессор Анатолий Анисимов*

## От редактора перевода

Со времени первого издания книги “Искусство программирования” Д. Э. Кнута прошло около 25 лет. Тем не менее книга не только не устарела, но по-прежнему остается основным руководством по искусству программирования, книгой, по которой учатся понимать суть и особенности этого искусства.

За эти годы на английском языке вышло уже третье издание 1-го и 2-го томов, а также второе издание 3-го тома. Автор внес в них значительные изменения и существенные дополнения. Достаточно сказать, что число упражнений практически удвоилось, а многие упражнения, включенные в предыдущие издания (особенно ответы к ним), модифицированы. Существенно дополнены и переделаны многие главы и разделы, исправлены неточности и опечатки, добавлены многочисленные новые ссылки на литературу, использованы теоретические результаты последних лет.

Значительно преобразилась глава 3, особенно разделы 3.5 и 3.6, а также разделы 4.5.2, 4.7, 5.1.4, 5.3, 5.4.9, 6.2.2, 6.4, 6.5 и др.

Естественно, возникла необходимость в новом издании книги.

Перевод выполнен по третьему изданию 1-го и 2-го томов и второму изданию 3-го тома. Кроме того, учтены дополнения и исправления, любезно предоставленные автором.

При переводе мы старались сохранить стиль автора, обозначения и манеру изложения материала. В большинстве случаев использовались термины, принятые в научной литературе на русском языке. При необходимости приводились английские эквиваленты. По многим причинам, в частности из-за сложности некоторых разделов, читать книгу “Искусство программирования” далеко не просто. Одной из причин, которые затрудняют понимание книги, является манера изложения автора; привыкнув к ней, можно существенно облегчить чтение.

Из-за обилия материала (часто мало связанного между собой) невозможно построить книгу так, чтобы различные понятия и определения вводились сразу же при первом упоминании о них. Поэтому в главе 1 могут обсуждаться без ссылок понятия, строгие определения которых приводятся в 3-м томе. Именно поэтому так велика роль предметного указателя, без которого понимание книги было бы существенно затруднено. Надеемся, что читатель не будет удивлен, найдя ссылки на главы 7, 8 и последующие не вошедшие в предлагаемые три тома главы. Мы вместе с автором надеемся, что очень скоро они будут опубликованы и, безусловно, сразу же появятся в русском переводе в качестве продолжения этого издания.

Следует также обратить внимание на далеко не всегда стандартные обозначения, которыми пользуется автор. Так же, как и определения, эти обозначения могут появиться в 1-м томе, а вводиться во 2-м. Поэтому без указателя обозначений пользоваться книгой было бы чрезвычайно трудно. Хочу также обратить внимание на запись  $[A]$ , где  $A$  — некоторое высказывание. Эта запись встречается в формулах, а иногда и в тексте, и обозначает величину, равную индикатору  $A$ .

# ПРЕДИСЛОВИЕ

*Дорогая Офелия!*

*Мне плохо от этих чисел:*

*Я не способен сосчитать мои стоны!*

— *Гамлет* (акт II, сцена 2, строка 120)

АЛГОРИТМЫ, описываемые в этой книге, имеют непосредственное отношение к числам. Я считаю, что их справедливо называют *получисленными*, так как они находятся на границе между численными и символьными методами. Каждый алгоритм должен не только находить числовое решение проблемы, но и хорошо сочетаться с внутренними операциями цифрового компьютера. В большинстве случаев человек не может оценить всю красоту подобных алгоритмов, если только он не владеет машинным языком компьютера. Эффективность соответствующей компьютерной программы — это жизненно важный фактор, который нельзя отделить от самого алгоритма. Проблема заключается в том, чтобы найти оптимальные способы работы компьютеров с числами, а это включает вопросы тактики и численного анализа. Поэтому предмет данной книги, без сомнения, относится к компьютерной науке так же, как к разделам математики, занимающимся численным анализом.

Некоторые математики, работающие в “высоких сферах” численного анализа, будут считать, что предлагаемые в этом томе темы относятся к сфере влияния системных программистов. А специалисты, работающие в “высоких сферах” системного программирования, наоборот, решат, что изучать рассматриваемые темы — дело численных аналитиков. Но я все-таки надеюсь, что найдутся читатели, которые захотят внимательно изучить эти фундаментальные методы. Хотя данные методы можно отнести, скорее всего, к нижнему уровню, на них основаны все грандиозные компьютерные приложения, предназначенные для решения числовых задач. Отсюда следует, насколько важно хорошо в них разобраться. В настоящем томе будет рассмотрена область, которая находится на стыке численного анализа и программирования; именно это и делает предмет книги весьма интересным.

В данном томе по сравнению с другими содержится значительно больший объем математического материала; это обусловлено спецификой изучаемых тем. Причем в большинстве случаев нужные математические темы раскрываются прямо на страницах книги практически с нуля (или на основании результатов, доказанных в томе 1). Но в некоторых разделах предполагается, что читатель знаком с используемым материалом.

В этом томе содержатся главы 3 и 4. Глава 3 посвящена случайным числам: здесь изучаются не только различные методы генерирования случайных чисел, но

и статистические критерии случайности, а также преобразование равномерно распределенных случайных чисел в другие типы случайных величин. Последняя тема позволяет проиллюстрировать практическое применение случайных чисел. В эту главу также включен раздел, повествующий о природе самой случайности. Глава 4 — это захватывающая история о том, какие открытия были сделаны в арифметике в результате многовекового прогресса. В ней обсуждаются различные системы представления чисел и способы преобразования одной системы в другую; рассматривается арифметика чисел с плавающей точкой, целых чисел высокой точности, рациональных дробей, полиномов и степенных рядов, а также вопросы разложения на множители и нахождения наибольших общих делителей.

Каждая из глав 3 и 4 может использоваться в качестве основы для семестрового университетского курса, причем изложение материала можно построить так, чтобы его можно было излагать на разных уровнях: как для первокурсников, так и для выпускников. В настоящее время курсы “Случайные числа” и “Арифметика” не входят в программы многих университетов. Но я надеюсь, читатель увидит, что в этих главах в едином ключе освещается материал, имеющий реальную образовательную ценность. Мой собственный опыт подтверждает, что он служит прекрасным способом ознакомления студентов с элементарной теорией вероятности и теорией чисел. Почти все темы, которые обычно рассматривают в таких вводных курсах, естественно возникают в связи с вопросами практического применения теории. Кроме того, обсуждение на лекциях вопросов практического использования результатов может стать той движущей силой, которая вызовет у студентов интерес к учебе и поможет понять важность и значение теории. Более того, в каждой главе содержатся упоминания о более сложных темах, которые у многих студентов вызовут интерес к дальнейшему изучению математики.


Этот том, в основном, представляет собой полную и самостоятельную книгу; исключения составляют только вопросы, касающиеся компьютера MIX, который описывался в томе 1. В приложении Б приведены использованные в данной книге математические обозначения, которые иногда отличаются от принятых в традиционной математической литературе.

## Предисловие к третьему изданию

Когда в 1980 году второе издание этой книги было закончено, в ней впервые были использованы системы компьютерного набора `TeX` и `METAfont`. А теперь я рад отметить завершение разработки этих систем возвратом к книге, которая вдохновила меня на их создание. Наконец-то мне удалось внести все тома в персональный компьютер и таким образом получить ее электронную версию, что позволит в дальнейшем вносить любые изменения в технологию печати и отображения на экране. Такой способ работы предоставил мне возможность сделать буквально тысячи улучшений, и я добился того, о чем так долго мечтал.

В этом новом издании я смог проверить каждое слово в тексте, стараясь сохранить юношеский задор оригинальных предложений и в то же время внести большую зрелость суждений. Были добавлены десятки новых упражнений, а на десятки старых даны новые или улучшенные ответы. Изменения коснулись всего текста,

но особенно это относится к разделам 3.5 (теоретические основы случайности), 3.6 (универсальные генераторы случайных чисел), 4.5.2 (двоичный алгоритм нахождения наибольшего общего делителя) и 4.7 (композиция и итерация степенных рядов).

 Таким образом, работа над книгой *Искусство программирования* продолжается. Исследования получисленных алгоритмов продвигаются с феноменальной скоростью. Именно поэтому некоторые части данной книги начинаются пиктограммой “В процессе построения” (это своеобразное извинение за то, что приведены не самые новые данные). Мои файлы переполнены важными материалами, которые я планирую включить в окончательное, знаменательное четвертое издание тома 2 (оно выйдет, вероятно, через 16 лет). Но сначала я должен закончить тома 4 и 5. Я хочу, чтобы они были опубликованы сразу же, как только будут готовы к печати.

Я чрезвычайно благодарен сотням людей, которые помогали мне собирать материал в течение последних 35 лет. Большая часть тяжелой работы по подготовке этого нового издания была выполнена Сильвио Леви (Silvio Levy), который профессионально отредактировал электронную версию текста, а также Джеффри Олдхэмом (Jefferey Oldham), который конвертировал почти все оригинальные иллюстрации в формат METAPOST. Я исправил все ошибки, которые бдительные читатели обнаружили во втором издании (а также ошибки, которых, увы, не заметил никто), и постарался избежать появления новых ошибок. Тем не менее я допускаю, что некоторые огрехи все же остались, и хотел бы их исправить как можно скорее. Поэтому за каждую опечатку\*, а также ошибку, относящуюся к сути излагаемого материала или к приведенным историческим сведениям, я охотно заплачу \$2,56 тому, кто первым ее найдет. На Web-странице, адрес которой приведен на обложке книги, содержится текущий список всех ошибок, о которых мне сообщили.

*Станфорд, Калифорния*  
*Июль 1997*

Д. Е. К.

*Когда работа над книгой продолжается в течение восьми лет, то появляется очень много людей — коллег, наборщиков, студентов, преподавателей и друзей, которых нужно поблагодарить. Но я не собираюсь освобождать их от ответственности за ошибки, которые остались в тексте.*

*Они должны были их исправить!*

*Иногда они даже несут ответственность за идеи, которые в конце концов оказываются ошибочными.*

*Но в любом случае я благодарен всем своим сотрудникам.*

— ЭДВАРД Ф. КЭМПБЕЛЛ (мл.) (EDWARD F. CAMPBELL, JR.) (1975)

*Defendit numerus [В числах ты найдешь покой] —  
это истина дураков;*

*Deperdit numerus [В числах ты найдешь погибель] —  
истина мудрых.*

— Ч. К. КОЛТОН (C. C. COLTON) (1820)

\* Имеется в виду оригинал настоящего издания. — *Прим. ред.*

# ПРИМЕЧАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

УПРАЖНЕНИЯ, приведенные в этой серии книг, предназначены как для самостоятельной проработки, так и для семинарских занятий. Очень трудно и, наверное, просто невозможно выучить предмет, только читая теорию и не применяя ее для решения конкретных задач, которые заставляют задуматься о прочитанном. Более того, мы лучше всего заучиваем то, до чего дошли самостоятельно, своим умом. Поэтому упражнения занимают важное место в данном издании. Я приложил немало усилий, чтобы сделать их как можно более информативными, а также отобрать задачи, которые были бы не только поучительны, но и позволяли читателю получить удовольствие от их решения.

Во многих книгах простые упражнения даются вместе с исключительно сложными. Это не всегда удобно, так как читателю хочется знать заранее, сколько времени ему придется затратить на решение задач (иначе в лучшем случае он их только просмотрит). В качестве классического примера подобной ситуации можно привести книгу Ричарда Беллмана (Richard Bellman) *Динамическое программирование* (М.: Изд-во иностр. лит., 1960). Это очень важная, новаторская работа, но у нее есть один недостаток: в конце некоторых глав в разделе “Упражнения и научные проблемы” среди серьезных, еще нерешенных проблем приводятся простейшие вопросы. Говорят, что кто-то однажды спросил д-ра Беллмана, как отличить упражнения от научных проблем, и он ответил: “Если вы можете решить задачу, значит, это упражнение; в противном случае это научная проблема”.

Совершенно очевидно, что в книге, подобной этой, должны быть приведены и сложные научные проблемы, и простейшие упражнения. Поэтому, чтобы читатель не ломал голову, пытаясь отличить одно от другого, были введены рейтинги, которые определяют степень сложности каждого упражнения. Эти рейтинги имеют следующее значение.

## *Рейтинг    Объяснение*

- 00    Чрезвычайно простое упражнение, на которое можно ответить сразу же, если прочитанный материал понят. Упражнения подобного типа почти всегда можно решить “в уме”.
- 10    Простая задача, которая заставляет задуматься над прочитанным, но не представляет особых трудностей. На ее решение вы затратите не больше минуты; в процессе решения могут понадобиться карандаш и бумага.
- 20    Средняя задача, которая позволяет проверить, понял ли читатель основные положения изложенного материала. Чтобы получить исчерпывающий ответ, может понадобиться примерно 15–20 минут.
- 30    Задача умеренной сложности. Для ее решения может понадобиться более двух часов (а если одновременно вы смотрите телевизор, то еще больше).



- 40 Достаточно сложная или трудоемкая задача, которую вполне можно включить в план семинарских занятий. Предполагается, что студент должен справиться с ней, затратив не слишком много времени, и решение будет нетривиальным.
- 50 Научная проблема, которая (насколько известно автору в момент написания книги) пока еще не получила удовлетворительного решения, хотя найти его пытались очень многие. Если вы нашли решение подобной проблемы, то опубликуйте его; более того, автор данной книги будет очень признателен, если ему сообщат решение как можно скорее (при условии, что оно правильно).

Интерполируя по этой “логарифмической” шкале, можно понять, что означает любая промежуточная рейтинг. Например, рейтинг 17 говорит о том, что упражнение немного проще, чем задача средней сложности. Если задача с рейтингом 50 будет впоследствии решена каким-либо читателем, то в следующих изданиях данной книги и в списке ошибок, опубликованных в Internet, она может иметь рейтинг 45 (адрес Web-страницы приводится на обложке книги).

Остаток от деления рейтинга на 5 показывает, какой объем рутинной работы потребуется для решения данной задачи. Таким образом, для выполнения упражнения с рейтингом 24 может потребоваться больше времени, чем для упражнения с рейтингом 25, но для последнего необходим более творческий подход.

Автор очень старался правильно присвоить рейтинги упражнениям, но тому, кто составляет задачи, трудно предвидеть, насколько сложными они окажутся для кого-то другого. К тому же одному человеку некая задача может показаться простой, а другому — сложной. Таким образом, определение рейтингов — дело достаточно субъективное и относительное. Я надеюсь, что рейтинги помогут вам получить правильное представление о степени трудности задач, но их следует воспринимать в качестве ориентира, а не в качестве абсолюта.

Эта книга написана для читателей с различным уровнем математической подготовки и научного кругозора, поэтому некоторые упражнения рассчитаны исключительно на тех, кто серьезно интересуется математикой или занимается ею профессионально. Если рейтингу предшествует буква *M*, значит, математические понятия и обоснования используются в упражнении в большей степени, чем это необходимо тому, кто интересуется в основном программированием алгоритмов. Если же упражнение отмечено буквами *NM*, то для его решения необходимо знание высшей математики в большем объеме, чем дается в настоящей книге. Но пометка *NM* совсем необязательно означает, что упражнение трудное.

Перед некоторыми упражнениями стоит стрелка “►”, которая означает, что они особенно поучительны и их очень рекомендуется выполнить. Само собой разумеется, никто не ожидает, что читатель (или студент) будет решать *все* задачи, поэтому наиболее важные из них и были выделены. Но это ни в коем случае не означает, что другие упражнения выполнять не стоит! Каждый читатель должен хотя бы попытаться решить все задачи, рейтинг которых меньше или равен 10. Стрелки помогут выбрать задачи с более высокими рейтингами, которые следует решать в первую очередь.

К большинству упражнений приведены ответы, помещенные в отдельном разделе в конце книги. Пожалуйста, пользуйтесь ими разумно: ответ смотрите только

после того, как приложите все усилия, чтобы решить задачу самостоятельно, либо если у вас совершенно нет времени на ее решение. Ответ будет поучителен и полезен для вас только в том случае, если вы ознакомитесь с ним *после* того, как найдете свое решение или изрядно потрудитесь над задачей. Ответы к задачам излагаются очень кратко и схематично, так как предполагается, что читатель честно пытался решить задачу собственными силами. Иногда в приведенном решении дается меньше информации, чем спрашивалось, но чаще бывает наоборот. Вполне возможно, что полученный вами ответ окажется лучше того, который помещен в книге, или вы найдете ошибку в ответе. В таком случае автор был бы очень признателен, если бы вы как можно скорее подробно сообщили ему об этом; тогда в последующих изданиях книги будет опубликовано более удачное решение, а также имя его автора.

Решая задачи, вы, как правило, можете пользоваться ответами к предыдущим упражнениям, за исключением случаев, когда это будет оговорено особо. Рейтинги упражнениям присваивались в расчете именно на это, и вполне возможно, что рейтинг упражнения  $n + 1$  ниже рейтинга упражнения  $n$ , даже если результат упражнения  $n$  является его частным случаем.

Условные обозначения	00	Простейшее (ответ дать немедленно)
	10	Простое (на одну минуту)
▶ Рекомендуется	20	Средней трудности (на четверть часа)
<i>M</i> С математическим уклоном	30	Повышенной трудности
<i>HM</i> Требуется знания высшей математики	40	Высокой трудности
	50	Научная проблема

## УПРАЖНЕНИЯ

- ▶ 1. [00] Что означает рейтинг *M20*?
2. [10] Какое значение для читателя имеют упражнения, которые приводятся в учебниках?
3. [34] Леонард Эйлер (Leonhard Euler) в 1772 году предположил, что уравнение  $w^4 + x^4 + y^4 = z^4$  не имеет решения в целых положительных числах, но Ноам Элкис (Noam Elkies) доказал в 1987 году, что существует бесконечное множество решений [см. *Math. Comp.* 51 (1988), 825–835]. Найдите все целочисленные решения, такие, что  $0 \leq w \leq x \leq y < z < 10^6$ .
4. [M50] Докажите, что если  $n$  — целое число,  $n > 4$ , то уравнение  $w^n + x^n + y^n = z^n$  неразрешимо в целых положительных числах  $w, x, y, z$ .

Упражнения — лучший инструмент познания.  
— РОБЕРТ РЕКОРД (ROBERT RECORDE),  
*The Whetstone of Witte* (1557)